

Breuken III (motivering)

V2

Jan Bergstra
Minstroom Research, Utrecht,
janaldertb@gmail.com

25 mei 2025

Samenvatting

De terminologie van het elementaire rekenen wordt besproken langs de lijnen van *synthetic fracterm calculus*. De verbinding tussen Engels en Nederlands/Duits ontstaat primair als volgt: breuk = Bruch = fracterm

1 Inleiding

Door te stellen dat breuk = fracterm maken we een keuze. Wie $\frac{3}{4}$ op paper ziet staan en de vraag krijgt: “wat is dat?”, kan zeggen: “dat is een breuk”, en daarmee bedoelen te zeggen “dat is een fracterm”. Dit is enerzijds niet een onredelijke voorstelling van zaken, en anderzijds is het is ook geen noodzakelijke voorstelling van zaken, want men kan ook antwoorden dat men een rationaal getal ziet. We werken met de hypothese dat men zich voorneemt bij de waarneming van een breukfiguur een fracterm te zien, en niet een fracvalue. Dit noemen we de aanname “fraction = fracterm

Toch valt hier iets te problematiseren, en wel de idee dat niet fracterm maar een andere notie de betekenis van fraction representeert en dat de keuze om breuk als fracterm te begrijpen met zich brengt dat een andere vertaling voor fraction moet worden gevonden. Die vertaling is in ons verhaal “brok”. Brok vertaalt fraction, in de context van elementair rekenen, en dat per definitie om zo te zeggen, wat betekent dat brok precies dezelfde vragen inzake betekenistoekenning moet oproepen als fraction, en dat daarop precies dezelfde antwoorden kunnen worden bekeken (dit alles modulo vertaling vanzelfsprekend).

Zo’n samenhang vind je ook bij de vertaling van geloof door faith. Geloof in een religieuze context, als onderdeel van een besef van geloofswaarheden, vertaal je door faith en niet zozeer door belief. Wat faith is wordt door zo’n vertaling niet vastgelegd, en dat hoeft ook niet. Een ander voorbeeld is de vertaling van miracle met wonder. Die vertaling is niet afgankelijk van het geven van een goede definitie van het betreffende

begrip. Men kan daar verschillend tegenaan kijken, wat de een een wonder vindt hoeft een ander geen wonder te vinden, en dat verschil is in eerste instantie onafhankelijk van de taal waarin men denkt en werkt.

2 Een vertaling voor fraction: brok

Brok vertaalt fraction in het bewustzijn dat we op zoek zijn naar een duidelijke betekenis voor dat woord. Over de betekenis van brok kun je tenminste drie opvattingen hebben.

(i) essentialisme: een brok is een breukwaarde; Essentialisme (a fraction is a value) komt in de wiskunde geregeld voor, b.v. als men spreekt van “the field of fractions”.

(ii) co-essentialisme: een brok is een breuk. Co-essentialisme is normaal in het elementaire onderwijs: “a fraction has a numerator and a denominator”.

(iii) Non-essentialisme, zowel essentialisme als co-essentialisme worden afgewezen en tussen beide in opteert men voor non-essentialisme: een fraction is een breuk/waarde. Bij non-essentialisme wordt vermeden om direct een keuze te maken, deze keuze is nu afhankelijk van de talige context en mogelijk ook van de operationele setting waarin de taal wordt gebruikt.

2.1 Wat is de betekenis van brok

De betekenis die we aan brok toekennen is betekenis die fraction in onze ogen zou moeten hebben. Maar wij gaan niet over de betekenis van fraction, daarover kunnen we alleen speculeren.

De zaak ligt complexer dan alleen te kiezen tussen de drie genoemde opties essentialisme, co-essentialisme en non-essentialisme. De keuze tussen de deze drie opties is zelf ook weer contextafhankelijk. Om precies te zijn:

- (a) de betekenis van “brok” is contextafhankelijk,
- (b) in een professioneel wiskundige setting heeft brok als voorkeursinterpretatie breukwaarde (als de context dat toelaat),
- (c) in de setting van elementair rekenen (waaronder beginnend rekenonderwijs) heeft brok als voorkeursinterpretatie breuk.
- (d) in een context van reflectie over de betekenis van brok is de voorkeursinterpretatie breuk/waarde (ofwel er is geen voorkeur voor breukterm (fracterm) of voor breukwaarde (fracvalue)).

2.2 Een rationale voor de notie breuk/waarde

De notie breuk/waarde voeren we in om een duidelijk omschreven concept te hebben dat in de buurt zit van het concept fraction hoe men daar ook precies tegenaan kijkt. We willen niet claimen dat breuk/waarde en fraction dezelfde betekenis hebben al was het maar omdat verschillende auteurs aan fraction een verschillende betekenis toekennen en we daar geen meerderheidsstandpunt hebben kunnen ontwaren. Het invoeren van zulke begrippen noemen we “landmarking”, en naast fracterm is breuk/waarde

($\text{fracterm}/\text{fracvalue}$) zo'n landmark. Landmarking helpt om een begripkader te versterken om een stuk theorie minder afhankelijk te maken van noties/benamingen met onduidelijke of moeilijk te bepalen betekenis.

Fraction is met name ambigu omdat in de professionele wiskunde frac primair breukwaarde (fracvalue) dan breuk (fracterm) betekent terwijl dat op school bij het elementaire rekenen primair andersom ligt. In Nederland staat de professionele wiskunde zozeer onder Engelstalige invloed dat de invloed van de professionele wiskunde op te betekenisstoekenning van "breuk" minder groot is.

2.3 De ambiguïteit van breuk/waarde

Wie de non-essentialistische positie aanneemt kan stellen dat $2/3$ een breuk/waarde is. Het hangt af van hoe een breukfiguur voorkomt welke betekenis men aan de daardoor voorgestelde breuk/waarde toekent. Als we duidelijk willen maken dat we over een breukfiguur schrijven dan kunnen we b.v. schrijven "de breukfiguur $2/3$ in de vorige alinea" of men kan er enkele of dubbele quotes omheen zetten, in beide gevallen wordt daarmee duidelijk dat van een verwijzing naar een breukfiguur sprake is zoals in: "in de eerste alinea van dit hoofdstuk staat ' $2/3$ ' voor een breukwaarde, maar in de derde alinea staat ' $2/3$ ' voor een breuk".

Het is niet eenvoudig om nu precies te zijn. Als men brok ziet als breuk/waarde dan is brokfiguur de betere formulering dan breukfiguur omdat wie b.v. $2/3$ leest in eerste instantie niet weet of een breuk dan wel een breukwaarde wordt bedoeld, en daarmee een brok ziet. Maar nu komt een nadere ramificatie van de betekenisstoekenning van brok in beeld.

2.3.1 Brok met bias

Brek/waarde is niet de enige betekenisstoekenning van brok onder de non-essentialistische positie. We zien de volgende drie opties:

(i) Er is een preferentie om een brokfiguur te lezen als een breukwaarde wanneer de context dat toelaat, en als een breuk in andere gevallen. Nu spreken we van een brok met waardenbias.

(ii) Complementair kan er een voorkeur zijn om een brokfiguur te lezen als een breuk. In dit geval spreken we van een brok met breukbias.

(iii) De hierboven genoemde betekenis van brok als breuk/waarde blijft gehandhaafd: als breuk/waarde er is geen voorkeur voor breukwaarde of breuk, men kan kiezen wat in de context past, en als beide opties passen dan is er sprake van ambiguïteit.

2.3.2 Dynamische disambiguëring

De keuze van de preferentie voor breukwaarde of breuk (tussen (i) en (ii) hierboven) hoeft niet voor eens en voor altijd gemaakt te worden bij de betekenisstoekenning van een brokfiguur. Denkbaar is dat die toekenning plaatsvindt met het oog op de deelnemers aan een interactie. De keuze bij de betekenisstoekenning, mits de talige context die keuze niet vastlegt, kan afhankelijk zijn van dynamische aspecten, en afhangen van het hoe en wat van de qua taal gegeven interactie.

Hier is dan sprake van een lezer en een schrijver (of zo men wil luisteraar of spreker). Nu is een denkbare positie dat bij communicatie waarin spreker en luisteraar beiden weten dat de luisteraar een professioneel wiskundige is een brokfiguur als een brokfiguur met waardenbias wordt gezien, terwijl in geval beiden weten dat de luisteraar een leerling elementair rekenen is een brokfiguur als brok met breukbias wordt gezien. In andere gevallen wordt door beide partijen een eigen keuze gemaakt met het risico dat er begripsverwarring ontstaat.

3 Alle concepten hebben ook varianten, daar moet men mee leven

Het concept van een fiets is goed te begrijpen, maar in de praktijk zijn er om te beginnen typen van fietsen (stadsfiets, sportfiets, racefiets, mountain bike, elektrische fiets etc.) en dan zijn er merken van fietsen (merken leveren verschillende typen en typen worden aangeboden door verschillende merken) en binnen zo'n merk/type combinatie zijn er dan vaak weer verschillende modellen en per model verschillende uitvoeringen van die modellen. Met getallen, termen, breuken, breuktekens en breukfiguren is het niet anders, bij elke uitwerking van zo'n idee ontstaan varianten van allerlei slag. Zoals je kunt zeggen, ik kom met de fiets, zonder zeer precies te zijn over wat voor fiets dat dan is spreek je ook over getal, term, breuk, breukteken en breukfiguur zonder volkomen precies te zijn.

De aanpak die wij voorstaan maakt een verschil tussen getal en breuk in die zin dat niet elke breuk een getal is. Wie dat verschil niet wil maken komt terecht in wat we noemen de naïeve fracterm calculus (zie [7]). Wij menen dat naïeve fracterm calculus een goed begrip van het elementaire rekenen in de weg staat en dat een aanpak in de lijn van de zgn. synthetische fracterm calculus (zie [8]) dan de voorkeur verdient. Die aanpak volgen we hier, maar met een uitwerking in het Nederlands en dat maakt weer een aanzienlijk verschil, want vertalingen zijn in dit onderwerp soms onverwacht, en zelfs de formele notaties zijn afhankelijk van het taalgebied.

In synthetische fracterm calculus spreekt vanzelf dat vereenvoudiging van een breuk een andere breuk oplevert en dat daarmee vereenvoudiging van een breuk een transformatieslag is. In de naïeve fracterm calculus ligt dat anders, daar is de benodigde precisie om vereenvoudiging als een transformatie te zien niet aanwezig.

3.1 De vaagheid van het concept term

De notie van een term in het algemeen en van een breuk (fracterm) in het bijzonder is tot op zekere hoogte vaag. Er zijn drie specten aan deze vaagheid:

- Het is niet op voorhand duidelijk welke signatuur aan de orde is. Bij breuken kan men zich veel extra functies voorstellen: om te beginnen teken (sign), absolute waarde, logaritme met basis 2, natuurlijke

logaritme, exponent, wortel. Men zal doorgaans uit de context moeten halen over welke signatuur wordt gewerkt.

- Het is evenmin op voorhand duidelijk welke notatie voor de verschillende functiesymbolen wordt gebruikt, ook is niet op voorhand duidelijk in welke volgorde de functies binden; op dit vlak zijn additionele gegevens nodig of wenselijk.
- Tenslotte is het minder duidelijk of twee termen hetzelfde zijn dan of twee termen gelijk zijn. Hetzelfde zijn (sameness) kan op veel manieren worden omschreven, b.v. de structurele gelijkheid van $[?]$. Bij breuken is duidelijk dat deze in elk geval verschillen (niet hetzelfde zijn) als beide niet ratiogelijk zijn, dwz. of de tellers of de noemers zijn ongelijk van waarde. Vereenvoudiging van een breuk, indien mogelijk, levert daarmee altijd een andere (dwz. verschillende) breuk op.

De notie van sameness die men hanteert zal meestal zo zijn dat vrijwel elke toepassing van een vergelijking als herschrijffregel een andere (niet dezelfde dus) term oplevert. Maar als je in een rekenpartij de herschrijffregel $x + y = y + x$ op $2 + 2$ loslaat (vermoedelijk geplaatst in een grotere context $C[-]$, dwz. voorkomend als $C[2 + 2]$) dan verandert er niets, maar dat is ook geen punt want in het rekenen komen zulke overbodige stappen doorgaans niet voor.

3.2 Sommen en producten

Som en product zien we als termen en de onderdelen hebben aparte namen, voor een som (somterm) de summanden (1e summand, 2e summand etc. werkend van links naar rechts) en voor het product (maalterm) de factoren (1e factor, 2e factor, etc. werkend van links naar rechts). We zien ook $a - b$ als een somterm waarbij $a - b$ een afkorting is voor de somterm $a + (-b)$ is (en de haakjes soms kunnen worden weggelaten volgens de spelregels van structurele equivalentie voor termtekens (= typen van termfiguren). Hierin is $-b$ een min (als afkorting van mintern).

De waarde van een somterm heet ook de som van die term of de som van de summanden van die term. De waarde van een product heet ook wel het product van die term. Dit is qua terminologie niet heel mooi, $a \cdot b \cdot c$ is gelijk aan het product (als waarde) van het product (als expressie) met factoren a , b en c , maar het is wel systematisch.

Het verwisselen (permuteren) van twee of meer summanden in een somterm levert een andere somterm die gelijk is (dezelfde waarde heeft). Verwisseling van summanden is een transformatie van de som die kan opleveren dat de 1e summand verandert en de verandering kan ook zo groot zijn dat de 1e summand van de som een andere waarde krijgt. Net zo bij producten. De situatie verschilt niet wezenlijk van die van breuken maar in der praktijk is er wel een verschil, namelijk teller en noemer zijn namen voor 1e en 2e argument van een deling (de leidende functie van een breuk), en die namen worden veel vaker gebruikt bij breuken dan 1e, 2e, 3e. ... argument bij optellen of vermenigvuldigen. De notie van het vereenvoudigen van een som of product wordt niet gehanteerd, het is ook niet heel duidelijk wat men daarmee zou kunnen of willen bedoelen.

Bij somtermen en maaltermen doet zich een complicatie voor: wat is de signatuur die we willen hanteren? Men zou kunnen kiezen voor de tweepplaatsige optelling en de tweepplaatsige vermenigvuldiging, maar dan is het nodig om te beschrijven dat associativiteit het gebruik van haakjes vaak overbodig kan maken. Maar men kan ook voor elke natuurlijke $k \geq 0$ een k -plaatsige optelling en een k -plaatsige vermenigvuldiging als beschikbaar vooronderstellen, wat leidt tot een oneindige signatuur en oneindig veel vergelijkingen om de relaties tussen de verschillende bewerkingen vast te leggen. Wat hier de beste werwijze is is niet op voorhand duidelijk.

4 Rekenkennis instrumenteel gebruiken, en niet normatief

We duiden “rekenen met breuken waarbij men breuk ziet als fracterm” aan met RmBF. RmBF levert een kijk op breuken en rekenen die conceptueel precies is en antwoorden levert op een veelheid van vragen die men daarover zou kunnen stellen. Natuurlijk levert het geen antwoord op alle vragen. Bijvoorbeeld de vraag “wat is het getal twee” heeft in RmBF het volgende antwoord: binnen het label (ENG: label) “natuurlijk getal” is sprake van een rijkdom aan vormgevingen (ENG: shapes). Een bekende vormgeving betreft getallen als een collectie $\mathbb{N}_{dec}$ (decimale natuurlijke getallen) bestaande uit de nietlege rijen van decimale cijfers met als beperking dat 0 de enige rij in $\mathbb{N}_{dec}$ is die met een 0 begint. In de vormgeving $\mathbb{N}_{dec}$ van natuurlijke getallen is de betekenis van “twee” de rij “2”.

Een vraag die men kan stellen is of met bovenstaande antwoord op de gestelde vraag in voldoende mate een inhoudelijk antwoord wordt gegeven. Het is geen doelstelling van RmBF om die vraag in filosofische zin echt bespreekbaar te maken. Dan kan worden gezegd dat er ook andere vormgevingen zijn die meer recht doen aan het concept “twee”, bijvoorbeeld door een getallenlijn als vormgeving te kiezen en uit te leggen hoe je daarop het 2e punt vindt. Dan blijkt wel dat het als concept uitleggen van de getallenlijn geen eenvoudige klus is en het nog maar de vraag of de primaire intuïties van het rekenen met behulp daarvan goed kunnen ontstaan. In RmBF nemen we aan dat de natuurlijke getallen via de vormgeving $\mathbb{N}_{dec}$ van een betekenis worden voorzien, wetende dat dat ook anders zou kunnen gebeuren. Dit heeft wel een consequentie die men voor lief moet nemen: natuurlijke getallen zijn tevens termen, en wel termen die zichzelf als betekenis hebben.

4.1 Getallen op de achtergrond

Het is beslist niet zo dat alle bekende of veelgebruikte vormgevingen van de natuurlijke getallen de eigenschap hebben dat getallen daarin ook termen zijn. In de verzamelingen leer is de constructie van von Neumann voor natuurlijke getallen heel bekend en veel gebruikt en daar is de afstand tussen object en term veel groter. Men kan ook zeggen dat in die aanpak van de verzamelingenleer natuurlijke getallen ook termen zijn maar

dan termen in een heel andere signatuur. Deze andere signatuur ontstaat door een naam te geven aan enkele constanten en functies die bewijsbaar bestaan in de context van de axiomatische verzamelingenleer (die uitsluitend de tweepolaatsige relatie “element van” nodig heeft), te weten, een constante voor de lege verzameling, een operatie (notatie meestal met een accoladepaar) voor het maken van een verzameling met een enkel element, en de functie voor de vereniging van twee verzamelingen.

4.2 Flexibiliteit

Goed begrip van RmBF moet juist niet opleveren dat men de beweringen van anderen niet kan begrijpen omdat deze conceptueel niet precies zouden zijn. Omgekeerd levert dit “goede begrip van RmBF” een uitgangspunt van waaruit men steeds kan proberen goed te begrijpen wat een ander wil zeggen en vanuit welke achtergrond een ander wil schrijven en spreken. Daarbij is een zinvol uitgangspunt aan te nemen dat het voor de hand ligt dat een ander geen duidelijke en bewust gekozen definities van breuk en getal bij de hand heeft en als leidraad gebruikt voor de validatie van de eigen uitingen terzake elementair rekenen. RmBF is in die zin niet normatief (eisen stellend aan andermans taalgebruik) maar instrumenteel (communicatie ondersteunend). RmBF geeft naast een aanpak voor terminologie en notatie van het elementaire rekenen ook een kader waarin men varianten daarvan kan begrijpen en determineren. Zo kan het blijken dat een gesprekspartner (zeg P) wel degelijk een definitie van een breuk (zeg breuk_P) hanteert maar dan uitsluitend eenvoudige breuken als breuk_P ziet, of eventueel ook de samengestelde breuken als breuk_P ziet. Zo’n hypothese kan men vormen om dan beter te begrijpen wat P wil zeggen. Naar vermogen kan men dan steeds de uitingen van P indien nodig omdenken naar wat RmBF daarvan zou maken. Bijvoorbeeld als P de elementen van breuk_P ziet als eenvoudige breuken (in de zin van RmBF) en als voorbeeld van het optellen van breuken P vervolgens uitlegt dat $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5}$ dan komt men voor vragen te staan. Men kan P vragen of $\frac{2+1}{5}$ een breuk_P is? Zo nee, dan is een vraag wat bedoelt P met optellen van breuken P , zo ja dan ligt voor de hand dat P bij breuk_P aan een ratiowaarde (en daarbij n.a.w. aan een paar van gehele getallen) denkt eerder dan aan een breuk. Met die hypothese kan men doorgaan om te begrijpen wat P wil zeggen. Het is niet vreemd als men de eigen metatheorie over de betekenis die een ander aan de terminologie toekent gedurende de interactie, of bij het lezen van een tekst, enkele malen moet aanpassen. Als men dan op een inconsistentie stuit dan is van belang dat RmB erbij zou kunnen helpen om allereerst deze inconsistentie te zien, en vervolgens om te bedenken hoe je die inconsistentie zou kunnen vermijden, en tenslotte om er voor te zorgen dat deze inconsistentie niet op enig moment op een onplezierige wijze het redeneerproces gaat verstoren.

4.3 Achtergrondinformatie

De referenties hieronder bevatten achtergrondinformatie voor de overwegingen hierboven. Praktische relevantie van werken met een foutwaarde voor $1/0$ wordt beschreven in [4]. Syntactische overwegingen vindt men

in [2] en [3]. De moeilijkheden van de gebruikelijke aanwijzing dat men delen door nul moet vermijden worden bekeken in [9].

Referenties

- [1] J.A. Bergstra. Arithmetical datatypes, fracterms, and the fraction definition problem. *Transmathematica*, ISSN 2632-9212, (published 2020-04-30), (2020). <https://doi.org/10.36285/tm.33>
- [2] J.A. Bergstra. Sumterms, summands, sumtuples, and sums and the meta-arithmetic of summation. *Scientific Annals of Computer Science*, 30 (2), 167-203, (2020), doi: 10.7561/SACS.2020.2.167.
- [3] J.A. Bergstra. Structural Equivalence of Arithmetical Expressions as a Technical Basis for Philosophical Arithmetic. *Transmathematica*, ISSN 2632-9212, (published 2020-04-30), (2024). <https://doi.org/10.36285/tm.99>
- [4] J.A. Bergstra. Errors, Failures, and Faults in the Context of Elementary Arithmetic. *Transmathematica*, ISSN 2632-9212, (published 2020-04-30), (2024). <https://doi.org/10.36285/tm.101>
- [5] J.A. Bergstra and A. Ponse. Division by zero in common meadows. In *R. de Nicola and R. Hennicker (editors), Software, Services, and Systems (Wirsing Festschrift)*, Lecture Notes in Computer Science 8950, pages 46-61, Springer, 2015. (2015). Recent and improved version: [arXiv:1406.6878v4](https://arxiv.org/abs/1406.6878v4) [math.RA] (2019).
- [6] Jan A. Bergstra and John V. Tucker, A complete finite axiomatisation of the equational theory of common meadows. *ACM Transactions on Computational Logic*, 26, 1, Article 1 (January 2025), 28 pages. <https://doi.org/10.1145/3689211>
- [7] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. Naive fracterm calculus. *J. Universal Computer Science*, 29 (9), 961-987, (2023). <https://doi.org/10.3897/jucs.87563>
- [8] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. Synthetic fracterm calculus. *J. Universal Computer Science*, 30 (3), 289-307, (2024). <https://doi.org/10.3897/jucs.107082>
- [9] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. Logical models of mathematical texts: the case of conventions for division by zero. *J. of Logic, Language and Information*, (2024). <https://doi.org/10.1007/s10849-024-09420-w>