

Breuken I: breuk, waarde en brok

V2

Jan Bergstra
Minstroom Research, Utrecht,
janaldertb@gmail.com

21 mei 2025

Samenvatting

De terminologie van het elementaire rekenen wordt besproken langs de lijnen van *synthetic fracterm calculus*. De verbinding tussen Engels en Nederlands/Duits ontstaat primair als volgt: breuk = Bruch = fracterm

breuk, fracterm, breukwaarde, fracvalue, breukteken, fracsign, breukfiguur, fracsign occurrence.

1 Breuk = fracterm

Volgens de *synthetic fracterm calculus* uit [15] kunnen we zeggen breuk = fracterm, waarbij een fracterm een rekenkundige expressie is met de delingsoperatie als leidend voegteken. Een breuk zien we als logisch/wiskundig object en niet als een tekst op schrift. Dat laatste is een breukfiguur. De breukfiguur is zelf ook nog een realisatie van een tussenliggende abstractie: het breukteken. Voor het rekenen willen we precies omgaan met de breuk als wiskundige abstractie, en dat is dan een object met drie onderdelen: teller, noemer, en operatiesymbool (abstract gezien). Teller en noemer zijn zelf ook weer expressies.

1.1 Voorbeelden van breuken

Er zijn oneindig veel breuken, hier een paar voorbeelden.

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{x}{2}, \quad \frac{1}{0}, \quad \frac{x}{0}, \quad \frac{2+x}{3-y}, \quad \frac{2+x+y}{z-y}, \quad \frac{3+\frac{1}{2}}{3-\frac{2}{3}}, \quad \frac{3+\frac{2}{0}}{3-\frac{x}{y}}$$

Op de vraag “wat is een breuk?” is het antwoord dat we hier voorstellen daarmee als volgt: een breuk is een fracterm. De Engelse vertaling van “breuk” (als notie in het elementaire rekenen) is dan “fracterm”, en omgekeerd is de NL vertaling van fracterm dan ook breuk. Breuk heeft daarmee dezelfde betekenis als “Bruch” in het Duits.

Aan het Engelse "fraction" kunnen we niet gemakkelijk een betekenis toekennen, zoals eerder beschreven in [4], en we zien fraction dan ook juist niet als de Engelse vertaling van het Nederlandse woord breuk, althans niet in de context van rekenen. In andere contexten zoals in de geologie, of in de politiek, is vertaling van breuk met fraction misschien beter houdbaar.

1.2 Fraction = brok

Bij gebrek aan een goede en algemeen bekende vertaling van fraction introduceren we brok als vertaling daarvan. Brok heeft dus in beginsel dezelfde betekenis als fraction, ook al heeft die betekenistoekenning problemen. Brok is niet een bij het rekenen bekende notie of term en dat is een voordeel.

1.3 Breukwaarden

Een gesloten breuk is een breuk zonder variabelen erin. Aan gesloten breuken kan men een waarde toekennen. De waarde van een gesloten breuk heet een breukwaarde. De breukwaarde van $\frac{a}{b}$ is ook het quotient van de waarde van a en de waarde van b , en dat quotient kort men vaak af tot het quotient van a en van b . In het elementaire rekenen zijn breukwaarden naast de rationale getallen met ook het perifere getal $\perp$ dat ontstaat bij delen door 0.

De zoektocht naar een adequate betekenistoekenning van brok is intrigerend. Maar de bedoeling is om dat woord zo min mogelijk te gebruiken, juist omdat het zo'n moeilijk concept is.

Een breuk wordt meestal gebruikt als een notatie voor een breukwaarde.

2 Werken met breuken

Om te beginnen zijn er allerlei verschillende breuken. Hieronder allereerst een lijst van categorieën van breuken, die naderhand worden verklaard (met tussen haakjes de Engelstalige naamgeving):

- eenheidsbreuk (unit fracterm),
- eenvoudige breuk (simple fracterm, ook: common fracterm en ook vulgar fracterm),
- vereenvoudigde breuk (simplified fracterm),
- onvereenvoudigde breuk (non-simplified fracterm),
- echte breuk (proper fracterm),
- vlakke breuk (flat fracterm),
- samengestelde breuk (composed fracterm),
- veilige breuk (safe fracterm),
- decimale breuk (decimal fracterm),

We merken op dat deze terminologie vooronderstelt dat een breuk een expressie is, als men breuk als getal zou klezen dan is deze terminologie niet te begrijpen.

3 Vereenvoudigen van breuken

Vereenvoudigen van breuken is een onderwerp over eenvoudige breuken, ofwel breuken van de vorm $\frac{a}{b}$ met a en b gehele getallen (voor wat dat zijn, zie elders).

1. vereenvoudiging van een eenvoudige breuk $\frac{a}{1}$ (en dus met a een geheel getal) levert a op, en vereenvoudiging van een eenvoudige breuk $\frac{a}{-1}$ levert 0 op als $a = 0$, levert $-a$ op als $a > 0$ en levert b op als $a = -b$ met $b > 0$. Vereenvoudiging van een breuk levert daarmee niet altijd een breuk op, en soms een geheel getal. Als vereenvoudiging wel een breuk oplevert dan is denomer daarvan ongelijk 1 en ongelijk -1 ,
2. Vereenvoudiging van een eenvoudige breuk levert weer een eenvoudige breuk of een heel getal.
3. Als een eenvoudige breuk niet vereenvoudigd is dan levert vereenvoudiging daarvan een andere breuk op met dezelfde breukwaarde, of een geheel getal met dezelfde waarde.
4. De notie van vereenvoudigen is ambigu: enerzijds wordt de transformatie naar een vereenvoudigde breuk bedoeld, maar soms ook de transformatie waarbij zowel teller als noemer door een gemeenschappelijke deler (ongelijk 1 en ongelijk 0) worden gedeeld, zodat weliswaar een andere breuk ontstaat, maar nog niet een vereenvoudigde breuk.
5. twee eenvoudige breuken heten equivalent als deze gelijke breukwaarden hebben, deze equivalentie schrijft men met het $=$ teken.
6. breuken zijn hetzelfde als deze dezelfde tellers en noemers hebben.
7. twee breuken zijn ratio-equivalent wanneer beide tellers dezelfde waarde hebben en ook beide noemers dezelfde waarde hebben.
8. Voorbeelden van vereenvoudiging:

$$\begin{aligned} \frac{2}{4} &=>_v \frac{1}{2}, \frac{3}{12} &=>_v \frac{1}{4} \\ \frac{0}{4} &=>_v \frac{0}{1}, \frac{3}{0} &=>_v \frac{1}{0} \\ \frac{5}{1} &=>_v 5, \frac{10}{2} &=>_v 5 \end{aligned}$$

4 Optellen van breuken

Het optellen van breuken is een thema dat zich allereerst afspeelt in de wereld van vlakke breuken. Twee vlakke breuken kan men als volgt optellen:

$$\frac{X}{Y} + \frac{U}{V} = \frac{X \cdot V + Y \cdot U}{Y \cdot V}$$

Als men alleen de eis zou stellen dat optelling een breuk oplevert dan volstaat de volgende nietszeggende observatie

$$\frac{X}{Y} + \frac{U}{V} = \frac{\frac{X}{Y} + \frac{U}{V}}{1}$$

Bovenstaande transformatie levert weliswaar een breuk op maar de nestingsdiepte van delingsoperaties neemt toe, en dat is niet wat je wilt.

Optellen van breuken is een niet functionele (ook wel: niet-deterministische) transformatie, b.v. als de beide noemers hetzelfde zijn kan men met een eenvoudiger resultaat volstaan:

$$\frac{X}{Y} + \frac{U}{Y} = \frac{X+U}{Y}$$

5 Breukwaarden zijn ook termen

Elders verklaren we dat breukwaarden en daarmee de waarden van alle expressies (in de elementaire rekenkunde) als gesloten termen (de zgn. waardetermen) kunnen worden gezien. Alle vereenvoudigde eenvoudige breuken met teller en noemer ongelijk 0, en noemer positief en ongelijk 1 zijn waardetermen. Zulke waardetermen noemen we ook waardebreuken. We noteren de waarde (d.w.z. waardeterm) van een gesloten expressie A met $||a||$. Met deze notatie bij de hand kunnen we de ratio van een gesloten breuk $\frac{a}{b}$ bepalen als de (niet noodzakelijk eenvoudige of vlakke) breuk $\frac{||a||}{||b||}$.

Twee breuken $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ zijn ratiogelijk, met notatie $\frac{a}{b} =_{\text{ratio}} \frac{c}{d}$, als $a = c$ en $b = d$.

6 (On)gelijkheid van breuken

Met $X =_{\text{str}} Y$ duiden we aan dat X en Y structureel gelijk zijn, de notie die we gebruiken om te beoordelen of twee breuken hetzelfde zijn. Structurele gelijkheid vergt een vrij ingewikkelde definitie (zie [?]) die we hier niet expliciet maken. Zeker is dat structureel gelijke breuken ook ratiogelijk zijn, maar de omgekeerde implicatie geldt niet, ofwel:

$$X =_{\text{str}} Y \rightarrow X =_{\text{ratio}} Y$$

Als X een nietvereenvoudigde eenvoudige gesloten breuk is en Y is de vereenvoudigde versie van X dan geldt $X \neq_{\text{str}} Y$ en ook $X \neq_{\text{ratio}} Y$.

6.1 Gelijkheid van breuken: gelijkwaardig maar niet noodzakelijk hetzelfde

Als we schrijven $X = Y$ voor breuken X en Y (of meer algemeen voor expressies X en Y) dan bedoelen we daarmee dat X en Y gelijkwaardig zijn, ofwel dezelfde waarde hebben. De uitspraak voor $X = Y$ is X is gelijk aan Y of afgekort X is Y .

Twee waarden zijn gelijk precies als ze hetzelfde zijn. Getallen zijn ook waarden en voor getallen geldt ook dat deze gelijk zijn dan en slechts dan

als ze hetzelfde zijn. Het is bij expressies dat gelijk zijn en hetzelfde zijn uiteen loopt (of kan lopen). $X = Y$ impliceert niet dat $X =_{\text{str}} Y$.

7 Fractalk snippets

Fractalk is het op elementair niveau schrijven en spreken over breuken. Fractalk snippets zijn korte beweringen uit fractalk. Bij elkaar geven deze snippets een beeld van hoe men over breuken kan spreken en schrijven.

1. In “het rationale getal $7/3$ ligt tussen 2 en 3” staat de breukfiguur $7/3$ voor een breukwaarde.
2. In “de noemer van $7/3$ ligt tussen 2 en 4” staat de breukfiguur $7/3$ voor een breuk.
3. In “het functieteken voor deling in $7/3$ is de schuine streep” staat de breukfiguur $7/3$ voor een breukteken.
4. In “de noemer van $7/(3 + \frac{2/5}{3/4})$ is moeilijk te lezen” staat de breukfiguur voor zichzelf (als breukfiguur).
5. $1/0$ is een breuk maar deze breuk heeft niet een rationaal getal als breukwaarde. De breukwaarde van $1/0$ is wat we noemen een perifere breukwaarde. Deze perifere breukwaarde noteren we ook wel met $\perp$.
6. De breukwaarde van de breuk $\frac{a}{b}$ heet ook wel het quotiënt van a en b . Daarmee is $\perp$ het quotiënt van 1 en 0 (en ook van 0 en 0 en van 2 en 0 etc.). Meer algemeen rekenen we met $\frac{1}{0} = \perp$. $\perp$ is een term, net zoals 0 en 1 en $1 + 2$ etc.
7. Sommige termen noemen we getallen. Dit is een aanname die niet iedereen altijd maakt je kunt het ook zo zien dat term en getallen helemaal verschillende zaken zijn. Dit is een mogelijke conventie inzake getallen: de getaltermenconventie. Bij de getaltermen conventie zeg je dat sommige termen tevens getallen zijn en daarbij hoort dan dat je natuurlijke getallen, gehele getallen en rationale getallen allemaal identificeert met bij behorende getaltermen.
8. De getaltermenconventie kun je dan weer op verschillende manieren realiseren en dat levert specifieke getaltermenconventies op, zoals b.v. de decimale getaltermenconventie. De decimale getaltermen conventie schrijft voor dat natuurlijke getallen er uit zien als $0, 1, 2, \dots, 9, 10, 11, \dots$ ofwel niet-lege rijen van decimale cijfers die, met uitzondering van 0 zelf niet met een 0 beginnen. Behalve 0 zijn alle natuurlijke getallen positief, en dat is niet afhankelijk van de getaltermen conventie. In de decimale getaltermenconventie ontstaan de negatieve gehele getallen als $-P$ met P een positief natuurlijk getal. Dus $-1, -2, -3, \dots$
9. Bij de rationale getallen heeft de getaltermen conventie twee varianten, met en zonder gemengde breuken als getaltermen. Het eenvoudigste systeem werkt zonder gemengde breuken en dat zien we als default voor de decimale getaltermenconventie. Getaltermen voor decimale getallen zijn dan de vereenvoudigde eenvoudige breuken

met een positieve noemer groter dan 1. Een eenvoudige breuk is een breuk van de vorm $\frac{a}{b}$ met a en b decimale getaltermen voor gehele getallen (ofwel gewoonweg, en vanwege de getaltermenconventie die we dan aannemen: gehele getallen).

10. Met de decimale getaltermenconventie weten we dan: sommige breuken zijn getallen en andere niet.
11. Breukwaarde is een speciaal geval van termwaarde. De termen $2 + (3 \cdot 5)$ en 18 hebben dezelfde termwaarde. De termwaarde van term P heet de breukwaarde van P als de term P zelf een breuk is. Elke gesloten term heeft een termwaarde en dat is een getal, soms een perfifeer getal.
12. Een ratio is een paar (a, b) van getallen, twee breuken P en Q zijn ratio-equivalent wanneer de teller van P dezelfde termwaarde heeft als de teller van Q en de noemer van P dezelfde termwaarde heeft als de noemer van Q .
13. Met $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ drukken we uit dat de beide breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$ dezelfde breukwaarde hebben. Maar $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$ zijn verschillende breuken. Vereenvoudiging van $\frac{2}{4}$ is mogelijk, en levert dan een andere breuk, te weten $\frac{1}{2}$ op.
14. Breukwaarden splitsen op in gewone breukwaarden en perifere breukwaarden. $\perp$ is de enige perifere breukwaarde. Als we naar waarden in het algemeen kijken dan zijn er ook andere perifere waarden. Behalve $\perp$ zijn ook ∞ en $-\infty$ bekende perifere waarden, maar in onze aanpak zijn ∞ en $-\infty$ en geen breukwaarden. Deze twee perifere breukwaarden ontstaan door limieten, b.v. $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, en $\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \downarrow 0} \log_2 x = -\infty$.
15. De oneindige perifere waarden spelen ook zelf een rol in de beschrijving van limieten:

$$\lim_{x \uparrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \downarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$
16. We vinden dan o.a. $\frac{\infty}{7} = \infty$, $\frac{\infty+2}{-3} = -\infty$, $\frac{2}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{\infty} = \perp$.
17. Een voor de hand liggende breukwaarde van $\frac{1}{\infty}$ lijkt 0 te zijn, en daar valt ook goed mee te werken, maar in de context van elementair rekenen hebben we een voorkeur voor $\frac{1}{\infty} = \frac{-1}{\infty} = \perp$.
18. $t = \perp$ drukt uit dat er geen betere, of althans geen voor de hand liggende, waarde voor de expressie t te vinden is. M.b.v. $\perp$ maken we de de deling totaal en dat levert een eenvoudiger logica op dan werken met deling als partiële functie.
19. Breuken hebben een teller en een noemer, breukwaarden daarentegen hebben geen teller en hebben geen noemer. Breuken en breukwaarden hebben daarmee aanzienlijk verschillende eigenschappen.
20. Een gesloten breuk is een breuk die geen variabelen bevat. Bij een gesloten breuk hoort een unieke breukwaarde, ook genoemd de waarde van de betreffende breuk.
21. Het Engelse “fraction” heeft geen ons bekende goede vertaling in het Nederlands of in het Duits. De complicaties is dat fraction vaak ook voor breukwaarde staat, waarmee een ambiguïteit instaat die in het Nederlands of en in het Duits zo niet voorkomt.

22. Om een uit ander materiaal voortkomende tekst over elementair rekenen te lezen is het redelijk om alle occurrences van “breuk” eerst door breuk/waarde te vervangen om vervolgens bij elke breukfiguur en bij elke occurrence van breuk/waarde een annotatie te plaatsen die aangeeft in termen van welke van de vier concepten breukwaarde, breuk, breukteken en breukfiguur men de betrokken occurrence moet lezen.
23. Een vlakke breuk is een breuk met de eigenschap dat zowel de teller als de noemer geen breuk als onderdeel bevatten. Breukvervlakking (fracterm flattening) is het brengen van breuken, en van termen in de rekenkunde in het algemeen, in de vorm van een vlakke breuk. Daarbij moet het resultaat gelijk (in de zin van $=$) zijn aan de oorspronkelijke term, wat juist niet wil zeggen dat beide termen hetzelfde zijn.

8 Getallen in DTS shape versus breuken

Bij getallen kennen we labels en shapes. We komen drie labels tegen: natuurlijk, geheel en rationaal. Op termijn ook de labels reëel en comple, maar die spelen bij elementair rekenen geen rol.

Shapes is een ander verhaal. Wij werken met het “decimal term shape” (decimale termen als shape, af te korten als DTS). Door termen als shape te kiezen krijgen we wel wat bijzonderheden. Dat staat hieronder met voorbeelden verklaard:

1. We gebruiken DTS als shape voor getallen van label natuurlijk, geheel, en rationaal. Anders gezegd: we gebruiken het DTS shape voor getallen.
2. De beweringen hieronder zijn geldig bij gebruik van het DTS shape. Bij een andere shape zit het weer anders.
3. Het rekenen en hoe we over rekenen spreken, schrijven, en redeneren, berust ten dele op afspraken. Om precies te kunnen redeneren moeten we die afspraken scherp hebben. Maar zulke afspraken vergen altijd uitwerking in detail anders is adequaat redeneren niet doenlijk. Hier zit een cruciaal deel van de inhoud van rekenonderwijs: ook al zijn de intuïties redelijk duidelijk, als je precies wilt kunnen redeneren dan moet de afspraken (b.v. inzake de shape voor getallen) precies gemaakt worden.
4. Elk natuurlijk getal is ook een geheel getal en elk geheel getal is ook een rationaal getal.
5. Elk rationaal getal is hetzij een geheel getal of een breuk, en in dat laatste geval is het een vereenvoudigde breuk met een positieve noemer groter dan 1.
6. Elke vereenvoudigde breuk met een positieve noemer groter dan 1 is tevens een rational getal.
7. Getallen noemen we ook waarden, en zo onderscheiden we natuurlijke waarden, gehele waarden en rationale waarden.

8. De waarde van een term is een getal. De term kunnen we zien als een notatie voor dat getal. Het getal is tevens een notatie voor zichzelf.
9. Bepaling van de waarde van een term t bestaat uit het vinden van een waarde w zodat $t = w$.
10. $t = r$ drukt uit dat t en r dezelfde waarde hebben.
11. Alle getallen (met label natuurlijk, geheel of rationaal) zijn termen. Maar niet alle termen zijn getallen, b.v. $2 + 2$ is wel een term van label natuurlijk, maar is geen getal van datzelfde label. De klassieke bewering $2 + 2 = 4$ is daarmee informatief doordat die gelijkheid de waarde vastlegt van een term (te weten $2 + 2$) die zelf geen waarde is.
12. In DTS is elk getal een unieke term. $\frac{2}{4}$ is geen getal, $\frac{1}{2}$ is dat wel en $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

9 Breuk/waarde als overkoepelend begrip

Breuk/waarde is de directe som ofwel de disjunct gemaakte vereniging van de meer specifieke noties: breuk en breukwaarde:

$$\text{Breuk/waarde} = \text{breukwaarde} \oplus \text{breuk}.$$

Breuk/waarde is een disjunctieve notie, d.w.z. de extensie daarvan is de disjunct gemaakte vereniging van twee noties (breuk en breukwaarde) die beide een directe definitie hebben. Met disjunct gemaakt wordt bedoeld dat je ook weet of je met een breuk of met een waarde te maken hebt. Dat mechanisme zit ingebakken in de notatie $\text{breukwaarde} \oplus \text{breuk}$.

De definitie van het concept breuk/waarde als $\text{breuk/waarde} = \text{breukwaarde} \oplus \text{breuk}$, moeten we zien als onafhankelijk van de keuze van een shape. Dus voor iedere shape neemt die shape een notie van breuk/waarde met zich mee. Specifiek voor de DTS shape krijgen we dat breuk/waarde de disjunct gemaakte vereniging is van breken en waarden, en dat is subtiel iets anders dan de verzameling van termen die uit de vereniging van breken en waarden bestaat.

De logica van het redeneren over breuk/waarden is niet eenvoudig te doorgronden. Een excursie naar categorietheorie en logica's die daarbij horen is eigenlijk niet te vermijden en dat sleept veel met zich mee. De voorlopige conclusies die we hier trekken zijn deze:

(i) als men breuk/waarde ziet als een mogelijke betekenistoekenning voor brok (fraction) dan hebben we daarmee nog niet zomaar duidelijkheid over het redeneren over brokken (fractions); dat blijft een ingewikkelde zaak, los van de overweging dat breuk/waarde misschien niet de beste betekenistoekenning van brok is;

(ii) breuk/waarde is een notie die men kan bestuderen uitgaande van het rekenen zoals hierboven beschreven, los van de vraag of uit te gaan van de betekenistoekenning $\text{brok} = \text{breuk/waarde}$ een verstandige stap is;

(iii) op basis van een theorie over de notie breuk/waarde kan men als volgende stap een theorie over brokken ontwikkelen, waarbij brok nog

een andere betekenis krijgt. Voor de hand ligt dat de notie brok nog aspecten van een mechanisme om een keuze (ofwel de disambiguering van een breukfiguur in een tekst) tussen breuk en waarde te maken in zich draagt;

(iv) precies te spreken, schrijven en redeneren over elementair rekenen is onmogelijk als men geen duidelijke keuzen maakt over verschillende zaken, de aanpak hierboven bevat een optie voor zulke keuzen, niet meer dan dat. Andere opties zijn er ook, maar er is niet zoiets als “niet moeilijk doen” en dan tevens de indruk willen wekken dat men precies weet hoe te spreken, schrijven of redeneren;

(v) de aanpak van het rekenen die hierboven is omschreven noemen we (allereerst Engelstalig) “DTS shape & fracterm biased elementairy arithmetic”. In NL: DTS/fracterm gebaseerd (elementair) rekenen.

10 Sommen en producten

Som en product zien we als termen en de onderdelen hebben aparte namen, voor een som (somterm) de summanden (1e summand, 2e summand etc. werkend van links naar rechts) en voor het product (maalterm) de factoren (1e factor, 2e factor, etc. werkend van links naar rechts. We zien ook $a - b$ als een somterm waarbij $a - b$ een afkorting is voor de som $a + (-b)$ is (en de haakjes soms kunnen worden weggelaten volgens de spelregels van structurele equivalentie voor termtekens (= typen van termfiguren). Hierin is $-b$ een min (als afkorting van minterm).

De waarde van een somterm heet ook de som van die term of de som van de summanden van die term. De waarde van een product heet ook wel het product van die term. Dit is qua terminologie niet heel mooi, $a \cdot b \cdot c$ is gelijk aan het product (als waarde) van het product (als expressie) met factoren a , b en c , maar het is wel systematisch.

Het verwisselen (permuteren) van twee of meer summanden in een som levert een andere som die gelijk is (dezelfde waarde heeft). Verwisseling van summanden is een transformatie van de som die kan op leveren dat de 1e summand verandert en de verandering kan ook zo groot zijn dat de 1e summand van de som een andere waarde krijgt. Net zo bij producten. De situatie verschilt niet wezenlijk van die van breuken maat in der praktijk is er wel een verschil, namelijk teller en noemer zijn namen voor 1e en 2e argument van een deling (de leidende functie van een breuk), en die namen worden veel vaker gebruikt bij breuken dan 1e, 2e, 3e. .. argument bij optellen of vermenigvuldigen. De notie van het vereenvoudigen van een som of product wordt niet gehanteerd, het is ook niet heel duidelijk wat men daarmee zou kunnen of willen bedoelen.

11 Optellen en vermenigvuldigen van breuken

De delingsdiepte $D_{\text{div}}(t)$ van een term is als volgt:

$$D_{\text{div}}(0) = D_{\text{div}}(1) = 1,$$

$$D_{\text{div}}(-t) = D_{\text{div}}(t),$$

$$D_{\text{div}}(t+r)D_{\text{div}}(t-r) = D_{\text{div}}(t \cdot r) = \max(D_{\text{div}}(t), D_{\text{div}}(r)),$$

$$D_{\text{div}}\left(\frac{t}{r}\right) = \max(D_{\text{div}}(t), D_{\text{div}}(r)) + 1.$$

11.1 Optellen van breuken

1. som van natuurlijke getallen wordt natuurlijk getal,
2. som van gehele getallen wordt geheel getal,
3. som van twee vlakke breuken makkelijk te schrijven als vlakke breuk, dat kan worden gedaan met de vergelijking (en herschijfregel)
$$\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{x \cdot v + u \cdot y}{y \cdot v},$$
4. dus ook (met inductie): som van meer dan twee vlakke breuken makkelijk te schrijven als vlakke breuk,
5. som van twee breuken met diepte n makkelijk te schrijven als breuk van diepte n ,
6. dus ook (met inductie): som van meer dan twee breuken met delingsdiepte ten hoogste n makkelijk te schrijven als breuk van delingsdiepte ten hoogste n ,
7. bij het optellen van vereenvoudigde eenvoudige breuken wil men graag ook weer een vereenvoudigde eenvoudige breuk krijgen. Soms is dat niet moeilijk: als $\frac{a}{b}$ een vereenvoudigde eenvoudige breuk is dan is $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ met c en d gehelen zodat $c = a \cdot a + b \cdot b$ en $d = a \cdot b$ ook een vereenvoudigde eenvoudige breuk. Maar in het algemeen hebben we hiervoor geen methode die het zonder vereenvoudiging van een tussenresultaat kan stellen. (Hier blijkt het belang van het uit elkaar halen van optellen en vereenvoudigen en de noodzaak om ook met nog niet vereenvoudigde eenvoudige breuken te werken).

11.2 Vermenigvuldigen van breuken

1. product van natuurlijke getallen wordt natuurlijk getal,
2. product van gehele getallen wordt geheel getal,
3. product van twee vlakke breuken makkelijk te schrijven als vlakke breuk, dat kan worden gedaan met de vergelijking (en herschijfregel)
$$\frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = \frac{x \cdot u}{y \cdot v},$$
4. dus ook (met inductie): product van meer dan twee vlakke breuken makkelijk te schrijven als vlakke breuk,
5. product van twee breuken met diepte n makkelijk te schrijven als breuk van diepte n ,
6. dus ook (met inductie): product van meer dan twee breuken met diepte n makkelijk te schrijven als breuk van diepte n ,
7. bij vermenigvuldiging van vereenvoudigde eenvoudige breuken wil je graag weer een vereenvoudigde eenvoudige breuk krijgen, maar dat lijkt niet te doen zonder een tussenresultaat of één of meer delen daarvan te vereenvoudigen.

Dat kan b.v. als volgt werken: Laat in het product $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ beide factoren een vereenvoudigde eenvoudige breken zijn. We weten $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{b}$

als we beide factoren van de het tweede product vereenvoudigen tot $\frac{a'}{d'}$ resp. $\frac{c'}{b'}$ dan weten we dat $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{d'} \cdot \frac{c'}{b'} = \frac{a' \cdot c'}{d' \cdot b'}$ en bovendien weten we dat $\gcd(a' \cdot c', d' \cdot b') = 1$ zodat, met gehele n en m waarvoor $n = a' \cdot c'$ en $m = d' \cdot b'$ we hebben dat $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{n}{m}$ waarbij de breuk $\frac{n}{m}$ een vereenvoudigde eenvoudige breuk is.

12 Afsluitende opmerkingen

Wat is rekenen: de eenvoudigste vorm: je hebt een term en je wilt de termwaarde vinden in de vorm van een getalterm met dezelfde waarde. Dat werk doe je door stapsgewijs de term te transformeren naar een term met de zelfde termwaarde maar die “dichter bij” een getalterm ligt. Deze notie van dichtbij is vaak niet zo eenvoudig te formaliseren maar spreekt intuïtief toch meestal vanzelf.

Delen door nul is een kwestie waar in de loop der jaren door velen naar is gekeken. Een vroege verwijzing is Suppes 1957 [19] waar in vrij veel detail wordt beschreven dat met $\frac{1}{0} = 0$ misschien goed valt te werken, zie ook een bespreking van het betreffende deel van het boek van Suppes in [2]. Maar breukvervlakking werkt dan niet zo goed, zoals is bewezen in [8]. In [11] wordt geloofwaardig gemaakt dat eigenlijk alleen de aanname $\frac{1}{0} = \perp$ goed genoeg is om breukvervlakking te garanderen. En dat leidt tot een keuze voor de fracterm calculus van common meadows uit [9]. Daarover vindt men meer informatie in [10, 12, 18]. Dat men op allerelei manieren tegen delen door nul aan kan kijken is te vinden in [13]. De transrationals uit [1] leveren een visie op delen door nul die als theoretisch model voor machinaal rekenen glijdendende komma kan worden gezien. Maar ook daar faalt beukvervlakking (zoals bewezen in [3]) en dat is voor het onderwys niet goed hanteerbaar.

Referenties

- [1] J. A. Anderson, N. Völker, and A. A. Adams. 2007. Perspecx Machine VIII, axioms of transreal arithmetic. In J. Latecki, D. M. Mount and A. Y. Wu (eds), *Proc. SPIE 6499. Vision Geometry XV*, 649902, 2007.
- [2] J.A.D.W. Anderson and J.A. Bergstra. Review of Suppes 1957 proposals for division by zero. *Transmathematica* (2021). <https://doi.org/10.36285/tm.53>
- [3] J.A. Bergstra. Fractions in transrational arithmetic. *Transmathematica*, ISSN 2632-9212, (published 2020-01-27), (2020). <https://doi.org/10.36285/tm.19>
- [4] J.A. Bergstra. Arithmetical datatypes, fracterms, and the fraction definition problem. *Transmathematica*, ISSN 2632-9212, (published 2020-04-30), (2020). <https://doi.org/10.36285/tm.33>
- [5] J.A. Bergstra. Sumterms, summands, sumtuples, and sums and the meta-arithmetic of summation. *Scientific Annals of Computer Science*, 30 (2), 167-203, (2020), doi: 10.7561/SACS.2020.2.167.

- [6] J.A. Bergstra. Structural Equivalence of Arithmetical Expressions as a Technical Basis for Philosophical Arithmetic. *Transmathematica*, ISSN 2632-9212, (published 2020-04-30), (2024). <https://doi.org/10.36285/tm.99>
- [7] J.A. Bergstra. Errors, Failures, and Faults in the Context of Elementary Arithmetic. *Transmathematica*, ISSN 2632-9212, (published 2020-04-30), (2024). <https://doi.org/10.36285/tm.101>
- [8] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg. Transformation of fractions into simple fractions in divisive meadows. *Journal of Applied Logic*, 16: 92–110, (2015). <https://arxiv.org/abs/1510.06233>
- [9] J.A. Bergstra and A. Ponse. Division by zero in common meadows. In *R. de Nicola and R. Hennicker (editors), Software, Services, and Systems (Wirsing Festschrift)*, Lecture Notes in Computer Science 8950, pages 46-61, Springer, 2015. (2015). Recent and improved version: [arXiv:1406.6878v4](https://arxiv.org/abs/1406.6878v4) [math.RA] (2019).
- [10] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. On the axioms of common meadows: Fracterm calculus, flattening and incompleteness. *The Computer Journal*, 66 (7), 1565-1572, (2023). <https://doi.org/10.1093/comjnl/bxac026>
- [11] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. Which arithmetical data types admit fracterm flattening? *Scientific Annals of Computer Science*, 32 (1), 87–107, (2022). <https://doi.org/10.7561/SACS.2022.1.87>
- [12] Jan A. Bergstra and John V. Tucker, A complete finite axiomatisation of the equational theory of common meadows. *ACM Transactions on Computational Logic*, 26, 1, Article 1 (January 2025), 28 pages. <https://doi.org/10.1145/3689211>
- [13] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. Eager equality for rational number arithmetic. *ACM Transactions on Computational Logic*, 24 (3), article no. 22 p. 1-28, (2023). <https://doi.org/10.1145/3580365>
- [14] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. Naive fracterm calculus. *J. Universal Computer Science*, 29 (9), 961-987, (2023). <https://doi.org/10.3897/jucs.87563>
- [15] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. Synthetic fracterm calculus. *J. Universal Computer Science*, 30 (3), 289-307, (2024). <https://doi.org/10.3897/jucs.107082>
- [16] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. 2024. Fracterm calculus for signed common meadows. *Transmathematica*, (2024). <https://doi.org/10.36285/tm.97>
- [17] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. Logical models of mathematical texts: the case of conventions for division by zero. *J. of Logic, Language and Information*, (2024). <https://doi.org/10.1007/s10849-024-09420-w>
- [18] J. Dias and B. Dinis. Strolling through common meadows. To appear in *Communications in Algebra*. <https://arxiv.org/pdf/2311.05460>
- [19] P. Suppes. *Introduction to Logic*. Van Nostrand Reinhold Company (1957).