Zijn er natuurlijke getallen? over decimale natuurlijke getallen

Jan A Bergstra, Minstroom Research, Utrecht
janaldertb@gmail.com

28 oktober 2026, V1

1 Inleiding

Het rekenen begint met de getallen $0, 1, 2, 3, ...$ En direct dient zich dan de vraag aan: wat is zo'n getal? Daarover is veel geschreven, en men kan er van alles van vinden. Hier stel ik een manier voor om dat te bekijken die goed genoeg in elkaar zit om elementair rekenen (elementair arithmetic) te begrijpen. Het is een zaak van het maken van keuzen over het gebruik van de taal.

(i) Ik gebruik een mix van Engels en Nederlands en zo nu en dan nieuwe woorden, d.z.w. neologismen die in het woordenboek niet zijn te vinden, of in elk geval niet met de betekenis die hier wordt gebruikt. Het hebben van een rijke en nauwkeurige taal is een voordeel, maar van het begin af aan alles in het NL te moeten uitdrukken is weer een nadeel.

(ii) Het "token" 273 is een concrete verschijning (occurrence, instantie) van een "sign" dat men ook met 273 kan aangeven. Voor een enkel sign kunnen er veel tokens bestaan, maar sommige signs zijn zo groot dat er nooit een token voor is gemaakt, en sommige signs zijn zo groot dat het ook niet goed denkbaar is dat er ooit een token voor zal worden gemaakt. (Het contrast token/sign uit de semiotiek is niet makkelijk naar het NL te vertalen, en daarom gebruik ik token en sign als importwoorden in een NL tekst.)

(iii) Het sign 273 zie ik als een "decimal natural number (DNN)", ofwel een decimaal natuurlijk getal (DNG, maar ik gebruik steeds DNN). Daarmee is 6 is ook een DNN. Het romeins geschreven VI is een RNN (Roman natural number). Ik zeg dus uitdrukkelijk niet dat 6 en VI verschillende notaties zijn voor "het(zelfde) getal zes", maar ik zeg liever dat 6 en VI verschillende getallen zijn (of zo men wil verschillende soorten (naar het Engelse "sort" dat in de universele algebra wordt gebruikt) van getallen).

(iv) De zienswijze dat er niet zoiets is als "het getal zes" ontleen ik aan Benacerraf 1965 [4]. De terminologie van decimal natural numbers is eerder uiteengezet in Bergstra 2020 [1].

(v) Wie dat wil kan in een later stadium de filosofie van de wiskunde bekijken en dan bedenken of men er anders tegenaan wil kijken, en bijvoorbeeld een hoger

© J.A. Bergstra 2026 Licence CC BY-SA 4.0

abstractieniveau nastreven bij het omschrijven van natuurlijke getallen. Door over DNN te spreken blijft de mogelijkheid open, dat je op termijnn met een een NN nog iets anders bedoelt. Maar voor een begrip van elementair rekenen is die stap niet nodig.

2 Optellen en vermenigvuldigen I

Ik ga er vanuit dat bij de lezer bekend is hoe men DNN's kan optellen en vermenigvuldigen. Om precies te zijn, ga ik er van uit dat men in eenvoudige gevallen kan beoordelen of beweringen van de vorm $2 + 17 = 19$, $32 + 5 = 16$, $18 \cdot 6 \neq 22$, $2 + 2 = 4$ waar of niet waar zijn.

Bij (het vaststellen van) de taal die we hanteren voor optellen en vermenigvuldigen doen zich allerlei vragen voor, ik noem daar enkele van:

- Willen we "5 én 6" lezen als 5 + 6? Dat is niet ongebruikelijk, maar ik gebruik liever taal die duidelijker is en waarin van meet af aan "en" een minder specifieke combinatie van items weergeeft.
- Bij het optellen van a en b bepaal je "de som van a en b" en het resultaat heet "a plus b" dat wordt geschreven als "$a + b$".
- Op het eerste gezicht is bovenstaande heel duidelijk. Maar je zou dan denken dat het resultaat van het optellen van 2 en 3, $2 + 3$ is, maar dat zo te zien is toch niet zo gebruikelijk, want dat resultaat is gewoon 5.
- Wat betekent het woord "som". In het rekenen is dit woord ambigu, som betekent vaak opgave (als in "som 6 hadden de meeste leerlingen goed"), som vaak de uitkomst van een optelling (als in "de som van 52 en 9 is 62), en men gebruikt som ook vaak als verwijzing naar een uitdrukking met + als leidend functiesymbool (als in "$7 + 8$ is een som van een even en oneven DNN").
- Ik ga ervan uit dat "som" niet opgave betekent, evenmin als in het Engels. M.a.w. exercise wordt uitsluitend met opgave vertaald en niet met som. Maar ook dan is er nog sprake van enige ambiguïteit: resultaat van optellen versus opdracht tot optellen (als in som als expressie). Hier is weinig aan te doen, dat restant van ambiguïteit is toch een eigenschap van de natuurlijke taal die men niet moet willen vermijden.
- Het woord product kan een voortbrengsel in algemene zin aanduiden (net als in het Engels) en het resultaat van een vermenigvuldiging, en ook een expressie als $54 \cdot 123 \cdot 4$. De eerste betekenis wil ik bij voorkeur vermijden.
- Een product als uitdrukking schrijft men vaak als 23×35, bij een uitdrukking als $3 \times x$ is het gebruikelijk om in plaats daarvan $3x$ te schrijven, terwijl $3 \cdot x$ leesbaar maar ongebruikelijk is. Ik geef de voorkeur aan $3 \cdot x$.
- Zoals men $a + b$ uitspreekt als "a plus b" (Engels: ook "a plus b"), spreekt men $a \cdot b$ uit als "a maal b" (Engels: "a times b").

- $2+3=5$ noemen we een gelijkheid, ook wel (gesloten) vergelijking. $2\cdot 8 = 4\cdot x$ is ook een gelijkheid/vergelijking (maar is niet gesloten).

- De ogenschijnlijk zo eenvoudige bewering $2+2=4$ kan men op verschillende manieren lezen (zie ook Wilkins 2024 [5]), namelijk

  (i) dat links (de LHS voor left-hand side) en rechts (de RHS voor right-hand side) van $=$ hetzelfde getal staat, en

  (ii) en dat links en rechts van $=$ uitdrukkingen staan die we op grond van eerdere afspraken dezelfde betekenis toekennen.

  Hierbij is niet sprake is van dezelfde expressies. Maar kunnen we nu zeggen dat beide exporessies LHS en RHS verschillen omdat de LHS een som is en de RHS geen som is? Daar lijkt zich de ambiguïteit van "som" tegen te verzetten. Het blijkt dat $2+2$ op twee verschillende manieren een som is, als expressie en ook als waarde.

- In Bergstra 2020 [1] spreek ik over sumterms en dan is $2+2$ een sumterm terwijl 4 geen sumterm is. Sumterms zijn ingewikkelder dan je op het eerste gezicht zou denken want $2+32+7$ is ook een sumterm en het is niet overtuigend om $2+32+7$ in eerste instantie als afkorting van $(2+32)+7$ of als afkorting van $2+(32+7)$ te willen zien. S umterms komen in eerste instantie voor in alle verschillende lengten (maar 16 zien ik niet als een sumterm van lengte 1). Werken met haakjes is dan als thema in eerste instantie niet aan de orde, inzicht in commutativiteit en associativiteit van het optellen evenmin. Sumterm is een voorbeeld van een neologisme (ook voor het ENG) dat ik niet probeer te vertalen.

- Er onstaat zo een specifieke terminologie:

  (i) 5 is de sumvalue van de sumterm $2+3$,

  (ii) $2+3$ zoals het op schrift staat is een sumtoken van het sumsign $2+3$. Dat sumsign is een concept, iets wat je als persoon kunt denken en wat wij ook collectief kunnen denken, overigens net als sumterm en sumvalue, alleen het sumtoken kun je (fusiek) waarnemen.

  (iii) het tweetal $(2,3)$ kun je zien als een sumpair (twee waarden die je kunt gaan optellen), $(3,17,22)$ is een sumtriple voor de sumgterm $2+17+22$. En als we aan haakjes doen dan is $(4,8)$ een sumpair voor $(2\cdot 2)+(7+1)$. Meer algemen is sprake van sumtuples van lengte n met n een DNN groter of gelijk aan 2. Een sumpair is daarmee een sumtuple van lengte 2 en een sumtriple is een sumtuple van lengte 3 enz.

  Dus bij $4+71+66+5$ zien is ook sprake van een sumtuple, een tuple van in dit geval vier waarden die als argumenten voor een optelling (van vier DNN's) dienen. Nu hebben we dat $4\cdot 2+71\cdot 3+6\cdot 5+5$ het sumtuple $(8,213,30,5)$ aangeeft. Impliciet geef je zo dan ook aan dat vermenigvuldigen sterker bindt dan optellen.

- Als je een sumtoken ziet staan (b.v. $2 + 3$, of $7 + 6 + 88$) dan weet je in eerste instantie niet wat er wordt bedoeld, dat zal pas blijken als je ook weet hoe het sumtoken wordt gebruikt in een context. Te zeggen dat $2 + 3$ een sumtoken is, is weliswaar juist (het klopt, is correct, niet onwaar), maar dat is ook erg (en misschien overdreven) voorzichtig. Het is meer waarschijnlijk dat met het genoemde sumtoken een sumterm of een sumvalue bedoeld wordt.

- Het sumtoken $2+3$ is om zo te zeggen vanuit zichzelf al ambigu. Elke meer specifieke benaming uit sumvalue, sumterm, sumtuple (sumpair, sumtriple etc.), sumsign, en sumtoken is in eerste instantie te specifiek. Hier introduceren ik een ongebruikelijk nieuw woord (een neologisme zowel voor NL als voor ENG): wie een sumtoken $2+3$ leest kan in eerste instantie spreken van een sumton, en dat laat dan nog de vijf genoemde mogelijkheden sumvalue, sumtuple, sumterm, sumsign e n sumtoken open. Deze terminologie is gekozen in vervolg op Bergstra & Tucker 2026 [3].

  Ik ga er van uit dat iemand die een sumtoken $2 + 17 + 8$ ziet staan en van een som (of sum) spreekt wel zoiets als sumton kan bedoelen. Maar dit is niet zeker en met sumton wordt de onderliggende ambiguïteit expliciet gemaakt. Sumton is daarmee een term die uitdrukkelijk en beoogd (qua ontwerp van de taal) ambigu is.

- Het is niet mijn voorstel dat men nu ineens termen als sumvalue, sumtuple of sumton in de alledaagse taal van het rekenen gaat gebruiken. Wel de bedoeling is te vermijden dat men lang moet nadenken over de betekenis van "som" als concept omdat het bij het bespreken van zulke vragen praktisch kan zijn om een meer gedetailleerde terminologie te kunnen hanteren.

3 Optellen en vermenigvuldigen II

Optellen en vermenigvuldigen zijn werkwoorden. Ook hier is sprake van ambiguïteit. Bij optellen en vermenigvuldigen van DNN's denkt een wiskundige in eerste instantie aan het bepalen, of anderszins aanwijzen, van het resultaat van optellen. Maar een informaticus denkt misschien aan een algorithme, zoals het fameuze algorithme om twee DNN's van n cijfers te vermenigvuldigen in een aantal stappen van grootteorde $n \cdot \log_2 n$. Overigens, ook de term algorithme is frappant moeilijk precies te omschrijven, ik heb een poging gedaan in Bergstra 2022 [2].

Steeds weer speelt ambiguïteit een rol en is de vraag of bewustzijn daarvan van belang is of niet. Daar is in het algemeen niet zo veel over te zeggen. Als je een schoolkind van 9 jaar oud vraagt of "je 27 en 81 kunt optellen", dan is de vraag of dat kind weet hoe dat moet, en niet zozeer of dat kind weet of het optellen van zulke DNN's in beginsel mogelijk is. Maar als je een kind van 8 vraagt of "je 27 appels en 81 peren kunt optellen", dan is de vraag niet zozeer of dat kind weet hoe dat moet, maar is juist de vraag of het kind weet of dat in beginsel doenlijk is of niet.

De beide contexten zijn subtiel verschillend en de ambiguïteit van “kun je optellen” valt daardoor nauwelijks op, en zich daarvan bewust te worden levert dan ook geen groot voordeel. Mijn uitgangspunt is dat het kunnen bespreken van ambiguïteit in de context van het elementair rekenen van belang is, maar de bedoeling is daarmee niet om het gebruik van dubbelzinnige taal te vermijden, primair is het doel om eventueel dubbelzinnige taal goed te begrijpen en eventueel beter te leren gebruiken.

4 Hoe verder?

De volgende stap is om na te denken over vragen die beginnen met “hoeveel”, met als belangrijke kwestie: hoeveel DNN’s zijn er?

Referenties

[1] J.A. Bergstra. Sumterms, summands, sumtuples, and sums and the meta-arithmetic of summation. *Scientific Annals of Computer Science*, 30 (2), 167-203, (2020), DOI.

[2] J.A. Bergstra. Defects and Faults in Algorithms, Programs and Instruction Sequences. Transmathematica), DOI, (2022).

[3] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. On Ambiguity: The case of fraction, its meanings and roles. arXiv 2604.04647 URL, (2026).

[4] P. Benacerraf. What numbers could not be. *The Philosophical Review*, 74 (1), 47-73, (1965).

[5] Alex Wilkins. Wiskundigen zijn het niet eens over wat ‘is gelijk aan’ betekent. New Scientist, June 11, 2024, URL