Wat zijn breuken? en het fraction = fracton postulaat

Jan Bergstra, Minstroom Research, Utrecht
janaldertb@gmail.com

V0.1, 4 november 2026

1 Inleiding

Breuken wil ik bekijken vanuit vier talen: Nederlands, Engels, Duits en Frans. Ik doe enkele aannamen:

- Breuk = $\text{fraction}_{\mathsf{Engels}}$ = Bruch = $\text{fraction}_{\mathsf{Frans}}$. Deze aaname spreekt helemaal niet vanzelf. Het Duitse Bruch staat naast/tegeonver Bruchwert en krijgt daarmee een syntactische bias die $\text{fraction}_{\mathsf{Engels}}$ niet heeft. De Engelse versie van Bruchwert is quotient, maar dat staat qua taal verder af van $\text{fraction}_{\mathsf{Engels}}$ dan Bruchwert van Bruch.

- Fraction is ambigu en daarmee ook breuk, dat neem ik aan. Meer precies: ik neem aan dat $\text{fraction}_{\mathsf{Engels}}$ = fracton (en voor uitleg van fracton zie hieronder). Fracton gebruik ik ook in Nederlands, Frans en Duits, want er is nieuwe terminologie nodig die in elk van deze talen adequaat functioneert.

- De ambiguïteit van fraction is niet controversieel, de verschillende definities van fraction worden in de literatuur niet tegenover elkaar gezet. Dit heeft fraction gemeenschappelijk met (computer program) testing, een notie die eveneens ambigu is maar waarvan de ambiguïteit geen punt van overweging lijkt te zijn voor de wetenschappelijke literatuur (zie Bergstra 2022 [4, 5]). Posities waarmee men het niet eens is worden gewoonweg overgeslagen.

- Fracton is een ambigue categorie (in de terminologie van Brubaker 2025 [12]). Fracton is de alternatieve compositie van de volgende concepten (eerst Engels): fracvalue, fracpair, fracterm, fracsign en fractoken. In een formule: fracton = fracvalue + fracpair + fracterm + fracsign + fractoken. De onderdelen van deze compositie moemen we alternatieven. (De ambigue categorie fracton werd geïntroduceerd in Bergstra 2026 [6].)

© J.A. Bergstra 2026 Licence CC BY-SA 4.0

Een vertaling van de alternatieven van fracton is als volgt: Fracvalue = breukwaarde, fracpair = breukpaar, fracterm = breukterm, fracsign = breuksign, fractoken = breuktoken. Token en sign worden ook in het Nederlands gebruikt, met het token als concrete en fysieke instantie van een sign. In het Duits vertaal ik sign met Zeichen en in het Frans maak ik van sign signe, en van token jeton.

De ambigue categorie fracton heeft dan de volgende beschrijving, als alternatieve compositie van concepten die men een duidelijke en ondubbelzinnige definite kan geven.

- Nederlands: Fracton = breukwaarde + breukpaar + breukterm + breuksign + breuktoken.
- Duits: Fracton = Bruchwert + Bruchpaar + Bruchterm + Bruchzeichen + Bruchtoken.
- Engels: fracton = fracvalue + fracpair + fracterm + fracsign + fractoken
- Frans: fracton = fracvaleur + fracpaire + fracsigne + fracjeton.

Hierbij is dus qua vertaling nog sprake van de volgende drie aannamen inzake vertaling van $\text{fraction}_{\mathsf{Engels}}$:

- Nederlands: breuk = $\text{fraction}_{\mathsf{Engels}}$,
- Duits Bruch = $\text{fraction}_{\mathsf{Engels}}$,
- Frans fraction = $\text{fraction}_{\mathsf{Engels}}$.

Voor het Engels is er vanzelfsprekend niet sprake van een aanname op dit vlak. De fraction = fracton assumption ziet er nu in de verschillende talen zo uit:

- Nederlands: fraction = fracton aanname (of postulaat),
- Duits: Bruch = Fracton Prämisse,
- Engels: fraction = fracton assumption,
- Frans: fraction = fracton postulat.

2 Wat is een breuk?

De vraag “wat is een breuk?” heeft geen beter antwoord dan: het woord breuk is ambigu, het kan in verschillende contexten verschillende betekenissen hebben, ook binnen EAwD. De range van deze verschillende betekenissen is voor verschillende mensen weer anders en kan in de tijd muteren. Met de aanname breuk = fracton wordt die range van verschillende opties voor de betekenis van breuk (binnen EAwD) vastgelegd.

2.1 Deelvragen gegeven het breuk = fracton postulaat

Er resteren dan de volgende vragen:

- wat is een breukwaarde (een getal, maar wat is een getal, en dat leidt tot labels en shapes), en dat leidt tot de volgende deelvragen voor shapes gebaseerd op de taal van decimale getallen.
  - wat is een decimaal natuurlijk getal,
  - wat is een decimaal geheel getal,
  - wat is een decimaal rationaal getal?
- wat is breukpaar,
- wat is een breukterm,
- wat is een breuksign, en
- wat is een breuktoken?

Ik ga er van uit dat elk van deze vragen een antwoord heeft dat niet primair in termen van ambiguïteit is omschreven, en daarmee eenvouiger is te geven dan een antwoord op de vraag "wat is een breuk". Voor deze antwoorden verwijs ik naar Bergstra & Tucker 2026 [11].

2.2 Terminologie voor breuken: hoe te disambigueren

1. Als men zegt deze breuk heeft een even teller, dan gaat het over een breukterm of over een breukpaar,
2. als men zegt de uitkomst van deze rekenpartijs is naar verwachting een breuk, dan gaat het over een breukwaarde,
3. als men zegt, die breuk linksboven op het bord kan ik vanaf waar ik nu zit niet goed lezen, dan gaat het over een breuktoken,
4. als men zegt: ik wist niet dat $5 \div 7$ een breuk is, dan gaat de vraag over een breuksign,
5. als men zegt dit is een eenheidsbreuk, dat wordt bedoeld: deze fracterm is een eenheidsfracterm d.w.z. een fracterm met als teller 1 en als noemer een decimaal natuurlijk getal (DNN, zie ook [8],
6. als men zegt, deze breuk kan verder worden vereenvoudigd, dan gaat het over een breukpaar of over een breukterm,
7. als men zegt dat is een samengestelde breuk, dan gaat het over een breukterm (samengesteld is niet van toepassing op breukparen),
8. als men spreekt over een vereenvoudigde breuk dan betreft het een breukterm of een breukpaar,

9. als met zegt deze breuk is positief dan betreft het een breukwaarde, als men zegt deze breuk is kleiner dan 7 dan betreft het een breukwaarde.

10. als men zegt: dit is een echte breuk (proper fracterm), dan gaat het over een breukpaar of een breukterm,

11. als men zegt: deze breuk stond ook op de vorige bladzijde dan gaat het over een breuktoken of een breuksign,

12. als men zegt deze breuk komt op blz. 15 minstens 6 maal voor dan gaat het over een breuksign,

13. als het gaat over de vierde breuk op pagina 7, dan gaat het over een breuktoken,

14. als men zegt "dit is een eenheidsbreuk", dan wordt bedoeld: deze fracterm is een eenheidsfracterm d.w.z. een fracterm met als teller 1 en als noemer een decimaal natuurlijk getal (DNN),

15. als men spreekt over het optellen van twee breuken dan wordt doorgaans bedoeld: het optellen van twee platte breuktermen met als beoogd resultaat een platte breukterm die de gewenste breukwaarde heeft (eventueel na invullen van waarden voor variabelen),

16. als men spreekt over het vermenigvuldigen van breuken dan bedoelt men doorgaans het vermenigvuldigen van twee platte breuktermen waarbij het resultaat weer een platte breukterm is (met de gewenste breukwaarde),

17. als men spreekt over het rekenen met breuken dan betreft dat rekenen waarbij relatief veel breuktermen voorkomen,

18. als men spreekt over het optellen (of vermenigvuldigen) van breuk dan kan ook worden bedoeld het optellen (of vermenigvuldigen) van breukwaarden, men als gedachte dat men dat doet door optelling (vermenigvuldiging) van breuktermen die de genoemde breukwaarden representeren,

19. een breukterm of breukpaar representeeert (stelt voor, is een notatie voor) een breukwaarde.

3 Beweringen die strijdig zijn met de breuk = fracton aanname

Het breuk = fracton postulaat spreekt niet vanzelf en weerspreekt claims over breuken die men regelmatig kan lezen. Hieronder wat voorbelden daarvan.

- Als men zegt: "let op een breuk is een getal" dan is men het niet eens met breuk = fracton,

- als men zegt "een breuk heeft een teller en een noemer", dan is men het niet eens mat de breuk fracton aanname (want een breukwaarde heeft niet altijd een teller en noemer ook al hebben sommige decimale rationale getallen wel deze twee componenten),
- als men zegt "een breuk is de uitkomst van een deling" dan heeft men het over een quotiënt en is men het niet ens met breuk = fracton (want een fracterm of fracsign of fractoken is niet de uitkomst van een deling),
- als men spreekt over de decimale notatie van natuurlijke getallen dan is men het niet eens met het verhaal over labels en shapes (en het onderdeel decimale natuurlijke getallen daarvan).

4 Decimale rationale getallen, en de shape QDNNIcmp

De shape QDNNIcmp wordt beschreven in [7], en die zie ik als de voorkeursshape voor het label rationaal. Dit is een uitbreiding van DNN en van DNNI (beide als eerder beschreven, in resp. [8] en [9]). Positieve niet-gehele rationale getallen in QDNNIcmp zijn signs voor vereenvoudigde fracterms van de vorm $\frac{a}{b}$ die aan deze drie eisen voldoen: (i) a en b zitten in DNN, (ii) $b > 1$, (iii) de ggd (grootste gemene deler) van a en b is gelijk 1, ofwel $\frac{a}{b}$ is een vereenvoudigde gesloten gewone (common, simple) fracterm.

Verder bevat QDNNIcmp het sign $\perp$ en dat is de waarde van de (d.w.z. alle) fractermen van de vorm $\frac{a}{0}$.

Ter uitleg van de aanduiding QDNNIcmp het volgende. Q geeft aan dar er sprake is van een shape voor rationals, QDNNI geeft aan dat deze shape wordt gezien als een uitbreiding van DNNI (integer), de toevoeging cm staat voor common meadow (een common meadow is een lichaam (Engels: field, Duits: Körper, Frans: corps), vergroot met een element $\perp$ dat als foutwaarde wordt gezien en dat je gebrukt om van de deling een totale (d.w.z. altijd een waarde opleverende) fuunctie te maken. Deze waarde $\perp$ noemen we een perifeer getal (peripheral number), of een perifeer element van de shape. Met de p wordt aangegeven dat een speciale sign voor de peripheral(s) wordt gebruikt. Daarmee is in de shape QDNNIcmp weliswaar $\frac{1}{0} = \perp$ waar maar $\frac{1}{0}$ is geen peripheral in QDNNIcmp en $\perp$ is dat wel. Bij de decimale rationale getallen hoort een betekenis voor de operaties optellen, aftrekken vermenigvuldigen en delen. Die beschrijving kan op allerelei manieren worden gegeven, maar verschillen in beschrijving van operaties leiden niet meteen tot verschillen in shape. De elementen van QDNNIcmp zie iks als "de decimale rationale getallen". Het moge duidelijk zijn dat er vele andere shapes voor het label rationaal getal bestaan, een beschrijving daarvan vindt men in [7]. Mijn voorkeur voor QDNNIcmp wordt gemotiveerd in genoemde paper.

5 Waarom doet dit alles terzake

Ik meen dat het onjuist is om leerlingen de suggestie te doen dat er zoiets is als een (magisch) concept breuk dat de verschillende componenten van fracton integreert. Zo'n notie is er niet. Dit wordt ook duidelijk gesteld in Wu 2011 [13].

Conceptuele precisie is iets wat men ook bij wiskunde kan leren en niet allen in de taallessen Nederlands, of bij een studie rechten. Binnen EAwD is sprake van een serieuze vorm van ambiguïteit en het is juist van belang dat leerlingen leren om daarmee om te gaan. Naderhand kan men dan beter overweg met ambiguïteit zoals die in een politiek of in een wetenschappelijk discours voorkomt, of zou moeten voorkomen bij een meer gedetailleerde analyse van de materie.

Het ligt voor de hand te denken dat mijn overwegingen hooguit voor de sterkere of in elk geval de meer geïnteresseerde scholier relevant kunnen zijn, omdat er toch wel enige moeilijkheidsgraad in zit. Ik zie dat juist omgekeerd en ik heb dan ook de verwachting dat conceptuele precisie juist een bruikbaar instrument is voor onderwijs aan studenten die e.e.a. niet zo gemakkelijk komt aanwaaien. Zij zullen ook niet zo gemakkelijk verwoorden wat zij niet begrijpen, maar zij zijn misschien minder in staat dan de in eerste instantie qua aanleg of voorkennis sterkere leerling om hun onbegrip van de materie te hanteren, en zij zouden belang kunnen hebben bij een meer systematische aanpak van de onderliggende begrippen, kaders en terminologie.

Referenties

[1] J. A. D. W. Anderson, N. Völker, and A. A. Adams. "Perspex machine viii: Axioms of transreal arithmetic." Accessed on 8 April 2019. In Longin Jan Lateki, David M. Mount, and Angela Y. Wu, editors, *Vision Geometry XV*, *Proceedings of SPIE*, pp. 2.1–2.12, 2007.

[2] J.A. Anderson. Review of Henry Thomas Colebrooke's 1817 Translation of Sanscrit Works on Division by Zero. *Transmathematica.* 2026. DOI.

[3] P. Benacerraf. What numbers could not be. *The Philosophical Review*, 74 (1), 47-73, (1965).

[4] J.A. Bergstra. A survey of testing for instruction sequence theory. *Scientific Annals of Computer Science* **32** (1), pp. 5–86 (2022).

[5] J. A. Bergstra. Defects and faults in algorithms, programs and instruction sequences. *Transmathematica*, `https://doi.org/10.36285/tm.49` (2022).

[6] J. A. Bergstra. Fracpairs and Quantitative Mereology. *Transmathematica*, 2026. DOI.

[7] J. A. Bergstra. Shapes naturlals, integers and rationals. In preparation (2026).

[8] Jan Bergstra. Zijn er natuurlijke getallen? over decimale natuurlijke getallen. Minstroom Research site. URL, (2026).

[9] Jan Bergstra. Wat zijn decimale gehele getallen? over de shapes $\mathrm{DNNI}_{\equiv}$ en DNNI. Minstroom Research site. URL, (2026).

[10] Jan A. Bergstra and John V. Tucker. On Defining Expressions for Entropy and Cross-Entropy: The Entropic Transreals and Their Fracterm Calculus. Entropy 2025, 27(1), 31; DOI

[11] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. On Ambiguity: The case of fraction, its meanings and roles. arXiv 2604.04647 URL, (2026).

[12] Rogers Brubaker. 2025. Gender Identity: The Career of a Category. *Theory and Social Inquiry* 1(1) (2025), 1-50. https://doi.org/10.16995/tsi.18211.

[13] H. Wu. The mis-education of mathematical teachers. *Notices of the AMS*, 8 (3), pp 327-384 (2011).