Wat is een som? over somparen en somtupels

Jan A Bergstra, Minstroom Research, Utrecht
janaldertb@gmail.com

30 oktober 2026

1 Intro

Deze tekst betreft alleen het optellen van decimale natuurlijke getallen. De kwestie die daarbij aan de orde komt is of je nu wel of niet met haakjes moet werken bij het optellen van drie of meer getallen. Mijn idee is dat in eerste instantie het optellen niet zozeer de tweeplaatsige operatie $x + y$ is, maar een familie van operaties is, elk met verschillend aantal argumenten, bijvoorbeeld $x +_3 y +_3 z$ is de versie van optellen met drie argumenten (summanden) en $x +_5 y +_5 z +_5 u +_5 w$ is de versie met 5 argumenten. Bij een uitdrukking $a + b + c$ is de idee niet zozeer dat haakjes die er hadden moeten staan zijn weggelaten, maar dat het subscript 3 onder de twee +-symbolen is weggelaten omdat men dat subscript makkelijk uit de tekst kan halen (aantal plus-symbolen in de uitdrukking plus 1). We krijgen nu veel vergelijkingen zoals

$$x +_5 y +_5 z +_5 u +_5 8 = x +_4 (y +_2 z) +_4 u +_4 8$$

Hier kun je het belang van haakjes al zien, zonder dat het nodig is om te begrijpen hoe en wanneer je haakjes mag weglaten. Het is redelijk om $x + y$ te zien als een afkorting voor $x +_2 y$, en dat levert:

$$x +_5 y +_5 z +_5 u +_5 8 = x +_4 (y + z) +_4 u +_4 8$$

Hieronder bespreken in deel 2 we eerst de twee belangrijkste functies op DNN's: opvolger en voorganger (die we noteren met $S(-)$, en $P(-)$ vanwege de Engels namen van deze twee operaties, resp. successor en predecessor.)

Vervolgens, in deel 3 bespreken we de syntax van het optellen in groot en misschien overdreven detail. We voeren somparen en somtupels in, met een eigen notatie te weten $[x +\bullet y]$ voor een sompaar, $[x +\bullet y +\bullet z]$ voor een somtripel etc. De idee is dat $[x +\bullet y]$ een tweetal is dat als argumenten klaarstaat voor optellen met $x +_2 y$, en $[x +\bullet y +\bullet z]$ is een drietal dat klaar staat voor drieplaatsige optelling met $_ +_3 _ +_3 _$. Om de somwaarde te krijgen moet er een operatie $[-]$ worden toegepast: $3 +_2 5 = 8$

© J.A. Bergstra 2026 Licence CC BY-SA 4.0

2 Opvolger en voorganger van DNN's

In [1] zijn de DNN's besproken, de decimale natuurlijke getallen. Dat begin levert een uitgangspunt voor verdere ontwikkeling van het rekenen. Gegeven de DNN's weten we dat optellen en aftrekken bestaat maar we weten misschien nog niet precies hoe het werkt, want daar was de beschrijving van DNN's niet van afhankelijk.

We beginnen met de functies $S(-)$ (succesor) en $P(-)$ (predecessor). Die kunnen we gemakkelijk omschrijven:

$S(0) = 1, S(1) = 2, S(2) = 3, S(3) = 4, S(4) = 5, S(5) = 6, S(6) = 7, S(8) = 9, S(9) = 10$.

Met b.v. $X3$ noteren we een DNN X ongelijk 0 gevolgd door een 3. Met b.v. $X = 24$ krijg je dan $X3 = 243$. Met grbuik van deze notatie ontstaan ook de volgende vergelijkingen voor de successorfunctie. Deze vergelijkingen gaan over toepassing van de successorfunctie op een DNN met twee of meer cijfers:

$S(X0) = X1, S(X1) = X2, S(X2) = X3, S(X3) = X4, S(X4) = X5, S(X5) = X6, S(6X) = X7, S(X8) = X9$.

En tenslotte $S(X9) = S(X)0$, waarbij $S(X)0$ ontstaat door eerst de successor functie op X toe te passen en daar dan een 0 achter te zetten, zodat er weer een DNN ontstaat.

Voor de predecessor functie (voorgangerfunctie) werkt het andersom:

$P(0) = 0, P(1) = 0, P(2) = 1, P(3) = 2P(4) = 3, P(5) = 4, P(6) = 5, P(7) = 6, P(8) = 7, P(9) = 8$.

En DDN's met meer dan één cijfer hebben de vorm Xc met $X \neq 0$ in DNN en c een cijfer, dwz, c in $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dat levert de volgende vergelijkingen op:

$P(10) = 9$ en voor $X \neq 0$ en $X \neq 1$ vinden we $P(X0) = P(X)9$, de andere gevallen zijn eenvoudiger:

$P(X1) = X0, P(X2) = X1, P(X3) = X2, P(X4) = X3, P(X5) = X4, P(X6) = X5, P(X7) = X6, P(X8) = X7, P(X9) = X8$.

3 Sumpairs, somparen

Een sumpair (sompaar) is een tweetal geschreven als $[a+\bullet\, b]$ met a, b in DNN. Sumpairs zitten in de soort Sumpair. Sumpairs zien we niet als getallen maar wel als quantities. Je kunt sumpairs soms wel gebruiken voor rekenen en meten. Heel nuttig zijn ze niet, maar het is aardig om er even over na te denken. De idee is dat we $[a+\bullet\, b] \equiv [c+\bullet\, d]$ hebben precies als $a + b = c + d$, maar we kunnen sumpairs bijvoorbeeld gebruiken als we nog niet precies zouden weten hoe optellen werkt. We hebben allerlei informatie betreffende sumpairs:

$$[a+\bullet\, b] \equiv [b+\bullet\, a]$$

$$[S(a)+\bullet\, b] \equiv [a+\bullet\, S(b)]$$

$$b \neq 0 \rightarrow [a+\bullet\, b] \equiv [S(a)+\bullet\, P(b)]$$

$$[a +\bullet b] \equiv [c +\bullet 0] \to c = a + b$$
$$[a +\bullet b] \equiv [0 +\bullet c] \to c = a + b$$

4 Sumtuples, somtupels

Een sumtuple (ook somtupel, maar we gebruiken het Engelse sumtuple en het NL somtupel door elkaar) van lengte drie is b.v. $[21 +\bullet 789 +\bullet 0]$, en een voorbeeld van een sumtuple van lengte 5 is $[3 +\bullet 10 +\bullet 200 +\bullet x +\bullet 45]$. De value/waarde van een somtupel X schrijven we als $\mathsf{v}(X)$, en de gedachte is dat $\mathsf{v}([a +\bullet b +\bullet c])$ de som van a, b, en c oplevert.

Maar we gaan er van uit dat we nog nauwelijks of niet weten hoe optellen werkt.

We stellen ons voor dat een som $a_1 + \cdots + a_n$ als afkorting kan worden gezien voor: $\mathsf{v}([a_1 +\bullet \ldots +\bullet a_n])$ terwijl $a_1 +_n \cdots +_n a_n$ als alternatieve notatie kan worden gebruikt. M.a.w.

$$\mathsf{v}([7 +\bullet 51 +\bullet 0 +\bullet 1]) = 7 +_4 51 +_4 0 +_4 1 = 59$$

De relevantie van het sumtupel ligt er met name in dat met de functies $\mathsf{summand}_k(-)$ voor DNN $k \geq 1$ summand no. k uit het sumtupel kan worden gehaald, bijvoorbeeld:

$$\mathsf{summand}_2([7 +\bullet 51 +\bullet 0 +\bullet 1]) = 51$$

Het selecteren van een summand die niet bestaat levert het error object $\bot$: b.v.$\mathsf{summand}_5([7 +\bullet 51 +\bullet 0]) = \bot$. Een summand uit $7 +_4 51 +_4 0 +_4 1$ halen is onmogelijk, want het is een term van type DNN, tenzij men daarmee uitdrukkelijk een sumterm bedoelt, maar dat moet er dan op e.a.a. wijze bijgezegd worden, hetzij door te spreken van de sumterm $7 +_4 51 +_4 0 +_4 1$ of door de notatie $[7 +\bullet 51 +\bullet 0 +\bullet 1]$ te gebruiken.

4.1 Equivalentierelaties op sumtuples

De meest voor de hand liggende equivalentierelatie op (gesloten) sumtuples is als volgt:

$$[a_1 +\bullet \ldots +\bullet a_n] \equiv [b_1 +\bullet \ldots +\bullet b_m] \iff a_1 +_n \ldots +_n a_n = b_1 +_m \ldots +_m b_m$$

We nemen nog even aan dat we misschien nog niet precies begrijpen hoe optellen werkt en daarmee ook niet precies weten hoe $\equiv$ op somtupels werkt. Maar we kunnen we er toch iets aan hebben om deze notaties te gebruiken, bijvoorbeeld door te "zien" dat je nullen weg kunt laten en dat je naast elkaar gelegen onderdelen eerst kunt optellen en dan (voor de duidelijkheid tussen haakjes) in het somtupel opnemen:

$$[7 +\bullet 81 +\bullet 333 +\bullet 0 +\bullet 12] \equiv [7 +\bullet 81 +\bullet (333 + 12)] \equiv [7 +\bullet 81 +\bullet 345]$$

Dit ziet er met de andere notatie wat minder mooi uit, maar het is een kwestie van smaak:

$$7 +_5 81 +_5 333 +_5 0 +_5 12 = 7 +_4 81 +_4 (333 +_4 12) = 7 +_3 81 +_3 345$$

Het gebruik van $\equiv$ in plaats van $=$ ligt in de lijn van Wilkins 2024 [**?**]. Met deze notaties kunnen we zonder haakjes werken zonder eerst in algemene zin uit te leggen hoe dat weglaten van haakjes precies werkt. Ofwel er is geen verhaal over het weglaten van haakjes. We kunnen $x_1 + \ldots + x_n$ zien als een vereenvoudigde schrijfwijze voor $x_1 +_n \ldots +_n x_n$, en dat is qua intuïtie duidelijker dan $x_1 + \ldots + x_n$ zien als een vereenvoudigde schrijfwijze voor $x_1 + (x_2 + (x_3 + \ldots (x_{n-1} + x_n)..))$. Een moeilijkheid van de laatste notatie is dat je er eigenlijk niet aan ontkomt om uit te leggen dat hoe de haakjes gezet worden er niet zo toe doet als je maar zorgt dat na het zetten van voldoende haakjes uitsluitend de tweeplaatsige optelling wordt gebruikt.

4.2 Meer terminologie; de ambiguïteit van sumtokens.

Het is zinvol om een uitgebreide terminologie bij de hand te hebben ook als veel daarvan niet of nauwelijks wordt gebruikt.

Zo noem ik $2 + 5$ een somterm, de waarde daarvan is ook een somwaarde (sumvalue), en dat is dan weer een DNN. In dit geval de DNN 7. Alle DNN's zijn tevens somwaarden. Maar als je $2 + 3$ op schrift ziet staan is dat een sumtoken (token voor een som). Dat sumtoken kan verschillende betekenissen hebben. Om te beginnen de sumvalue 7, dan het sumpair $[2 +\bullet 5]$, maar ook de sumterm $2 + 3$ en het sumsign $2 + 3$ (dat is het sign waarvan het sumtoken $2 + 3$ een token is). Het DNN 7 is bepaald als het sign 7. Dat laatste is een keuze die men als arbitrair kan zien, maar dat geldt voor iedere keuze voor een shape voor naturals, want zoals in [1] is gesteld,"de" natuurlijke getallen bestaan niet, er zijn alleen shapes voor naturals, en geen enkele daarvan is evident het meest overtuigend.

Terugkomend op het sumtoken $2 + 3$, dat is op grond van bovenstaande ambigu, want het kan staan voor een sumsign, een sumterm, een sumpair en een sumvalue. Een notie met deze mate van ambiguïteit kunnen we een naam geven (sumton) en een beschrijving (description) In dit geval: sumton = sumvalue $\oplus$ sumpair $\oplus$ sumterm $\oplus$ sumsign $\oplus$ sumtoken.

Ik bedoel dus niet dat de notie sumtoken ambigu is, het sumtoken $2 + 3$ "zelf" is ambigu, het kan verschillende betekenissen hebben. Het is daarbij zelfs ongebruikelijk (maar niet ondenkbaar) dat de beoogde betekenis van een sumtoken $2+3$ het betreffende sumtoken is. Bijvoorbeeld, als je zegt: dat sumtoken is eigenlijk te klein voor mij, ik kan het vanaf deze afstand niet goed lezen. Of bij dat sumtoken is het contrast met de achtergrond onplezierig. Ik ga ervan uit dat ion de meeste gevallen het sumtoken voor een sumvalue staat en in aanzienlijke minderheid van de gevallen voor een sumterm. De andere betekenissen, sumpair, sumsign en sumtoken, komen alleen bij uitzondering voor, en die uitzonderingen zijn in het rekenonderwijs nauwelijks van belang.

5 Commentaar

Sumtuples zijn een uitwerking van de opteloperaties met een reeks van inputs uit Bergstra 2020 [2]. Daar werd het functiesymbool $+\bullet$ nog niet gebrukt. In plaats daarvan wordt $\mathsf{v}([a+\bullet b])$ geschreven als $a+_2 b$ en wordt $\mathsf{v}([a+\bullet b+\bullet c+\bullet d])$ geschreven als $a+_4 b+_4 c+_4 d$, daarbij is de gedachte dat $a+_4 b+_4 c$ geen goede expressie zou zijn (d.w.z. geen sumtupel voorstelt, evenmin als $a+_2 b+_2 c$ en $a+_2 b+_3 c$).

Mijn motivering voor het werken met sumtupels, en expliciete notaties daarvoor, ligt daarin dat ik er van uit ga dat de eerste intuitie van het optellen met expressies als $3+5+7+81$ te maken heeft, en niet alleen met uitdrukkingen van de vorm $2+3$. Maar hoe valt een uitdrukking met verschillende voorkomens van $+$ te lezen zonder haakjes te denken die je eerst hebt (al is het maar denkbeeldig) en dan weglaat? Men gebruikt haakjes om de genoemde uitdrukking te lezen als b.v. $(3+5)+(7+81)$ zodat er slechts een enkele binaire optelfunctie nodig is. Maar om de haakjes weg te laten vergt een rechtvaardiging die m.i. pas later aan de orde moet komen. Inzicht in het weglaten van haakjes helpt in eerste instantie helpt om de werking van optellen te begijpen. Dat men de haakjes vervolgens weer weg kan laten na constatering van de associativiteit van de tweeplaatsige optelling is een kwestie die ook veel later pas aan de orde hoeft te worden gesteld. In een onderwijssituatie kan men in eerste instantie zo over $a+b+c$ schrijven en spreken alsof het $\mathsf{v}([a+\bullet b+\bullet c])$, danwel $a+_3 b+_3 c$ betreft.

De notatie met het functiesymbool $+\bullet$ is gekozen om de issues beter te kunnen vergelijken met minpairs an fracpairs, die inmiddels al van soortgelijke notaties voorzien zijn (zie Bergstra 2026 [3]).

Referenties

[1] J.A. Bergstra. Zijn er natuurlijke getallen? over decimale natuurlijke getallen. Minstroom Research site, URL, (2026).

[2] J.A. Bergstra. Sumterms, summands, sumtuples, and sums and the metaarithmetic of summation. *Scientific Annals of Computer Science*, 30 (2), 167-203, (2020), DOI.

[3] J.A. Bergstra. Fracpairs and Quantitative Mereology. Transmathematica), DOI, (2026).

[4] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. On Ambiguity: The case of fraction, its meanings and roles. arXiv 2604.04647 URL, (2026).

[5] P. Benacerraf. What numbers could not be. *The Philosophical Review*, 74 (1), 47-73, (1965).

[6] Rogers Brubaker. 2025. Gender Identity: The Career of a Category. *Theory and Social Inquiry* 1(1) (2025), 1-50. DOI.

[7] Alex Wilkins. Wiskundigen zijn het niet eens over wat ‘is gelijk aan’ betekent. New Scientist, June 11, 2024, URL