Decimale natuurlijke getallen met een oneindige waarde erbij

Jan Bergstra, Minstroom Research, Utrecht
janaldertb@gmail.com

4 november 2026

1 Inleiding

DNN's (of DNN-naturals) hebben twee rollen: ordinale rol en de kardinale rol. De ordinale role betreft het aanwijzen van een item in een rij. Je geent dan aan de hoeveelste in de rij je bedoelt. Dat betreft dan meestal een rij met objecten (items/elementen) die op e.o.a. manier bij elkaar horen. en de kardinale rol ofwel aangeven hoeveel objecten er zijn die op de e.a.a. manier bij elkaar horen. De 4e letter uit de rij letters (a, e, f, u, u, d, z) is u en de 5e letter ook. De rij heeft 7 items, ofwel de kardinaliteit van genoemde de rij is 7. 7 is zowel een ordinaalgetal (dat een positie in de(rang/volg)orde aanwijst) als een kardinaalgetal (dat een hoeveelheid aanwijst).

2 Hoeveel in het groot

Een belangrijke vraag is hoeveel DNN-naturals er zijn. Dat houdt niet snel op, immers als X een DNN is dan is X0 (X gevolgd door 0 of wel X maal 10) ook een DNN. Zo krijg je te beginnen met 1: $10, 100, 1000, 10.000, 100.000, 1000.000$, $10.000.000$, $100.000.000, 1000.000.000, 10.000.000.000, 100.000.000.000$, en verder $1000.000.000.000$, $10.000.000.000.000$,$100.000.000.000.000$, en dan kom je bij $1000.000.000.000.000$. Dit getal betekent iets: De VS hebben een schuld van USD $40.000.000.000.000$, en dat zijn dan weer $4000.000.000.000.000$ dollarcenten. Maar er zijn veel grotere getallen. Het zichtbare heelal om ons heen zou een diameter hebben van zo'n $10.000.000.000.000 \times 100.000.000.000 = 1000.000.000.000.000.000.000.000$ kilometer, en dat is dan $10.000.000.000.000.000.000.000.000.000$ centimeter, en daarmee $100.000.000.000.000.000.000.000.000.000$ millimeter en daaarmee $100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000$ femtometer. Een fentometer is ongeveer de omvang van een proton, een quark is dan weer 2000 maal kleiner.

© J.A. Bergstra 2026 Licence CC BY-SA 4.0

3 Een grootste getal?

We hebben nu al belang bij preciezere taal. We kunnen spreken van DNN-value (de waarde van het DNN als concept, ofwel b.v. 237 als mentaal concept). En 237 is ook een DNN-term sign. We komen hier de eerder besproken aanname tegen dat we de signs zoals 237 zelf als DNN-values, dat is als DNN's, zien. En dan heb je de DNN-tokens. Kortom, bij DNN's is eigenlijk alleen sprake van signs en tokens zodat DNN-value = DNN-term = DNN-sign.

Voor DNN-values (en daarmee DNN-terms en DNN-signs) is er geen bovengrens, maar voor in de werkelijkheid bestaande DNN-tokens ligt dat anders. Er komt een punt dat getallen zo groot worden dat niemand ooit een token voor het getal heeft opgeschreven. Maar het is onmogelijk om zo'n groot DNN-natural op te schrijven, immers dan heeft het niet de eigenschap dat het nooit is opgeschreven. Wel kan het gebeuren dat iemand beweert dat hij of zij een DNN heeft opgeschreven (dwz. een DNN-token heeft gemaakt) met de eigenschap dat nooit eerder zo'n groot DNN is opgeschreven. Of dat dan klopt is dan niet zo eenvoudig om vast te stellen, misschien iets voor het Guiness book of records.

Nu kun je zeggen dat er willekeurig grote DNN-tokens denkbaar zijn. Maar een "denkbaar DNN-token" is gewoonweg een DNN-sign. En de omvang (grootte) van een DNN-sign is het sign zelf, gezien als DNN-value. De omvang van een DNN-token is een ander verhaal, dat heeft twee componenten: de grootte van het de DNN-value waarvan het token een sign is, en de fysieke omvang van het DNN-troken zelf. Nu de computers steeds kleiner worden krijgt men te maken met fysiek steeds kleinere DNN-tokens voor steeds grotere DNN-values. Die tokens hebben vaak de vorm van binaire getallen of van hexadecimale getallen.

Het binaire natuurlike getal (BNN voor binary natyural number) 100 is gelijkwaardig aan/met het DNN 4. We zien dat 100 zelf ambigu is: enerzijds een DNN-token, anderzijds een BNN token. Deze ambiguïteit doet er wel toe en vergt soms aandacht.

Propositie 3.1. *Er bestaat geen grootste DNN. (En daarmee geen grootste DNN-value of DNN-term of DNN-sign)*

Het argument voor Propositie 3.1 is dat we ons bij elke DNN die we ons kunnen voorstellen (zeg X) een grotere DNN kunnen voorstellen (zeg $X+1$, of $10{\cdot}X$). De DNN's worden wel door mensen verschillende gedacht maar niet door mensen gemaakt. DNNś bestaan ook niet in ruimte en tijd. Dat in tegenstelling tot DNN-tokens waarvan we (per definitie van token en sign) aannemen dat deze door mensen worden gemaakt en gezien.

Het is geen moeilijke vraag of er al DNN-naturals waren voordat er mensen bestonden. Dat ligt niet voor de hand vanwege de definitie die gebruik maakt van de cijfers uit het Sanskrit (zie [2] voor dit deel van de geschiedenis van elementair rekenen).

Maar men kan vinden dat de definitie van DNN's niet fundamenteel genoeg is en dat het om "het idee erachter" gaat, en dat er sprake is van een meer fundamentele notie van NN (natural number, eventueel voorzien van een ramificatie van noties zoals NN-value, NN-term, NN-sign, en NN-token). Als men

weet hoe men die notie van een NN wil omschrijven (ook al stelt Benacerraf 1965 [3] dat zoiets niet kan) dan doet de vraag zich weer voor of er sprake is of kan zijn van de mogelijkheid (of zelfs het feit) van de existentie van zulke concepten (als "het getal zevenentwintig") die aan het mensdom vooraf gaat.

Propositie 3.2. *Er bestaat (op aarde, in het zonnenstelsel, in de Melkweg, ...) op elk moment wel een grootste DNN-token (of een stel grootste DNN-tokens), maar waar men dat/die kan vinden is misschien moeilijk te bepalen.*

4 Een oneindig "getal" ∞ en $\mathbf{DNN}_\infty$

Hoeveel DNN-naturals zijn er dan? Minstens zoveel als elk DDN-natural, en zelfs meer. We noemen dat oneindig veel en we gebruiken ∞ als een ordinaal getal voor oneindig (en dan de kleinste vorm daarvan).

DNN-naturals is een kwestie van design, er is geen dwingende reden om aan te nemen dat het hier iets ander betreft dan een product van de menselijke cultuur. We zijn dan ook vrij om aan DNN een object ∞ toe te voegen en daarmee te gaan rekenen. Dat levert dan DNN_∞ op, de uitbreiding van DNN met ∞. Hier zijn wat voorbeelden van rekenen met ∞:

$$7 + \infty = \infty$$

$$8 \cdot \infty = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

Maar er doet zich een keuze voor: wat is $0 \cdot \infty$? 0 is heel klein en ∞ is heel groot, wat wint, klein, groot of geen van beide? Er zijn verschillende mogelijkheden. In de transrationals van Anderson et. al. 2007 [1] is er nog een bijzonder object Φ (met de naam nullity), ook een perifeer getal met aparte rekenregels: $\Phi + 7 = 8 + \Phi = 10 \cdot \Phi = \Phi \cdot 8 = \Phi$. En dan dan geldt

$$0 \cdot \infty = \Phi$$

Dit is een veel gebruikte oplossing van de vraag "wat is $0 \cdot \infty$?". In plaats van Φ schrijft men ook wel $\perp$.

4.1 Het grootste getal?

In DNN_∞ is ∞ het grootste getal. Maar op geen enkele wijze heeft ∞ op die manier de status van "het grootste getal" in een meer algemene of zelfs absolute zin. Zowel voor de ordinale rol als voor de kardinale rol heeft men grotere "getallen" bedacht, maar dit is niet de plaats om dat in detail te bespreken.

Wat is de rol van ∞ als zo'n object nauwelijks een bijdrage levert aan de theoriën van tellen en meten. De duidelijkste rol van ∞ op dit moment zie je in de zogenaamde transreals, een structuur met oneindige waardenn waarin

een oneindige waarde ∞ voorkomt en dat is dan een theoretisch model voor de getaqllen in de computer die anno nu zogenaamde IEEE 754 floating point reals zijn en daarin komen we een waqarde tehen die men ∞ noemt en waarmee men ook een vorm van oneindig probeer na te bootsen (iets wat in een computer bij de huidige stand van zaken vanzelfsprekend niet kan).

5 Commentaar

Het object ∞ noemen we een perifeer getal (in het Engels peripheral number) om aan te geven dat het niet gewoon is. Je voegt het toe maar dat hoeft niet, en meestal doet men dat ook niet. In de terminologie die is behandeld in Bergstra 2026 [**?**, **?**] zien we ∞ als een sumvalue, $1 + \infty + 7$ als een sumtuple (en ook als een sumterm), $\infty + \infty$ ook als een sumsign en een token daarvoor als een sumtoken.

Hoewel je ∞ prima als kardinaalgetal zou kunnen gebruiken doet men dat nooit, het bijbohorende kardinaalgetal heet $\aleph_0$.

5.1 Waarom DNN-naturals?

De vraag of de natuurlijke getallen bij het begin van het heelal al bestonden doet zich in onze aanpak niet voor, want dat de DNN-naturals toen niet bestonden ligt voor de hand. Door met DNN-naturals te werken ontstaat ook redelijk overtuigende noties van een DNN-sign en van een DNN-token. Een alternative aanpak is om de 0 te vooronderstellen en dan met de opvolgerfunctie (successor function) $\mathsf{S}(-)$ steeds nieuwe waarden te maken. Redenen om die route niet te kiezen zijn deze:

(i) je krijgt dan de shape DPNN (Dedekind-Peano Natural Numbers), te weten $0, \mathsf{S}(0), \mathsf{S}(\mathsf{S}(0)), \mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(0))), \ldots$. Dat is eigenlijk niiet te lezen zonder haakjes te tellen en aantallen beginhaakjes en sluithaakjes te vergelijken en daarmee vooronderstel je kennis van het toepassen van het rekenen bij de introductie daarvan, dat voelt onbevredigend aan.

(ii) DPNN's hebben grote bekendheid gekregen binnen de mathematische logica, maar veel minder daarbuiten. De idee dat 3 een afkorting is van $\mathsf{S}(\mathsf{S}(\mathsf{S}(0)))$ is niet zomaar overtuigend.

(iii) Als je kiest voor DPNN's dan is daarna de vraag of je niet beter voor de vNNN's had kunnen kiezen, de von Neumann naturals die in de verzamelingenleer een grote vlucht hebben genomen. De details daarvan laten we hier achterwege.

(iv) Met het oog op het vele gebruik in computers komen dan ook de BNN's in beeld. Maar de DNN's drukken ook uit dat het hier in eerste instantie gaat om (concepten achter) tokens die mensen kunnen lezen en schrijven.

5.2 Entropic transreals

Een alternatief voor $0 \cdot \infty = \perp$ is $0 \cdot \infty = 0$. Dat alternatief is aan de orde in de zgn. entropic transreals (uit Bergstra & Tucker 2025 [4]). Dat heeft bepaalde voordelen, maar die te behandelen voert hier te ver.

5.3 Overflow

Een mogelijk gebruik van ∞ is om de rekenregels van ∞ te gebruiken voor een heel groot getal, zeg $K + 1$, waarbij je K ziet als het grootste DNN dat nog "in de computer past". Dan werkt ∞ as zgn. overflow.

5.4 Eindig veel versus oneindig veel

Een rij is eindig lang als ie als lengte p heeft voor een DNN p, anders is de rij oneindig lang. Een oneindige lange rij heeft oneindig veel items. Een voorbeeld van een oneindig lange rij zijn we tegengekomen, $1, 10, 100, 1000..$ steeds weer 10 maal groter, en dat zonder eindpunt.

Referenties

[1] J. A. D. W. Anderson, N. Völker, and A. A. Adams. "Perspex machine viii: Axioms of transreal arithmetic." Accessed on 8 April 2019. In Longin Jan Lateki, David M. Mount, and Angela Y. Wu, editors, *Vision Geometry XV*, *Proceedings of SPIE*, pp. 2.1–2.12, 2007.

[2] J.A. Anderson. Review of Henry Thomas Colebrooke's 1817 Translation of Sanscrit Works on Division by Zero. *Transmathematica.* 2026. DOI.

[3] P. Benacerraf. What numbers could not be. *The Philosophical Review*, 74 (1), 47-73, (1965).

[4] Jan A. Bergstra and John V. Tucker. On Defining Expressions for Entropy and Cross-Entropy: The Entropic Transreals and Their Fracterm Calculus. Entropy 2025, 27(1), 31; DOI

[5] Jan Bergstra. Zijn er natuurlijke getallen? over decimale natuurlijke getallen. Minstroom Research site, URL (2026).